

SENTIDOS DA MULTIPLICAÇÃO E A APLET MULTIPLICAÇÃO DA PLATAFORMA HYPATIAMAT

MEANING OF MULTIPLICATION AND THE MULTIPLICATION APLET OF THE HYPATIAMAT
PLATFORM

LOS SENTIDOS DE LA MULTIPLICACIÓN Y LA APLET MULTIPLICACIÓN DE LA PLATAFORMA
HYPATIAMAT

Yelitza Freitas¹, Ricardo Pinto^{1,2}, Virgílio Rato¹, Ana Gomes³ & Fernando Martins^{1,4}

¹Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, i2A, NIEFI, Portugal

²Associação Hypatiamat, Portugal

³Escola Básica da Solum Sul, Portugal

⁴Instituto de Telecomunicações, Portugal
yelitzamafreitas@gmail.com

RESUMO | Este artigo foca-se no uso da plataforma *Hypatiamat* na prática letiva de uma professora estagiária com o objetivo de promover a compreensão e de superar as dificuldades observadas nos alunos do 2.º ano de escolaridade do 1.º Ciclo do Ensino Básico sobre os sentidos da multiplicação. Apresenta-se a implementação das cinco sessões que integraram a *applet* Multiplicação da plataforma *Hypatiamat*. Os resultados confirmam que a integração da plataforma *Hypatiamat* na prática educativa contribuiu para a compreensão e aprofundamento dos conhecimentos relacionados com os sentidos da multiplicação de alguns alunos. Discutem-se algumas dificuldades sentidas pela professora estagiária na gestão simultânea do comportamento e dificuldades dos alunos, que poderão ter interferido nos resultados e deverão ser consideradas em intervenções futuras.

PALAVRAS-CHAVE: Artefactos Digitais, Operações Aritméticas, Matemática Elementar, Aprendizagem Colaborativa.

ABSTRACT | This article focuses on the use of the *Hypatiamat* platform in the educational practice of a trainee teacher with the aim of promoting understanding and overcoming the difficulties observed in students of the 2nd year of schooling of the Primary School about the meanings of multiplication. The implementation of the five sessions that integrated *Hypatiamat* platform Multiplication applet are presented. Results confirm that the integration of *Hypatiamat* platform in the educational practice has contributed to the understanding and deepening of knowledge related to the meaning of multiplication, for some students. We discuss some difficulties experienced by the trainee teacher in managing students' behavior and students' difficulties, which may have interfered with the results, and should be considered in future interventions.

KEYWORDS: Digital Artifacts, Arithmetic Operations, Elementary Mathematics, Collaborative Learning.

RESUMEN | Este artículo se centra en la aplicación de la plataforma *Hypatiamat* en la práctica educativa de una profesora en formación con el objetivo de favorecer la comprensión y superar las dificultades observadas en alumnos del 2º año de escolaridad de la Educación Primaria sobre los sentidos de la multiplicación. Se presenta la implementación de las cinco sesiones que integraron la aplicación Multiplicación de la plataforma *Hypatiamat*. Los resultados confirman que la integración de la plataforma *Hypatiamat* en la práctica educativa ha contribuido para la comprensión y profundización de los conocimientos relacionados con los sentidos de la multiplicación de algunos alumnos. Se discuten algunas dificultades experimentadas por la profesora en formación en la gestión simultánea del comportamiento y dificultades de los alumnos, que pueden haber interferido en los resultados y deberán tenerse en cuenta en futuras intervenciones.

PALABRAS CLAVE: Artefactos Digitales, Operaciones Aritméticas, Matemática Elemental, Aprendizaje Colaborativo.

1. INTRODUÇÃO

A resolução de problemas envolvendo a multiplicação nos sentidos aditivo e combinatório aparece nas Aprendizagens Essenciais (AE) a partir do 2.º ano de escolaridade do 1.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) (ME, 2018). De acordo com Ribeiro e Almeida (2022), a resolução de problemas e os momentos de discussão são oportunidades para a compreensão dos sentidos da multiplicação.

Alguns autores referem que a utilização de Artefactos Digitais (AD) pode motivar os alunos e favorecer o ensino e a aprendizagem da Matemática, quando utilizados de forma adequada e com intenção pedagógica (Costa et al., 2021; Martins et al., 2018; Verdasca et al., 2020).

A melhoria da qualidade das aprendizagens e os resultados matemáticos dos alunos são influenciados pela ação do professor e o seu conhecimento (Costa et al., 2021; Rodrigues et al., 2022).

A prática educativa aqui apresentada foi realizada numa turma constituída por 24 alunos do 2.º ano do 1.º CEB. Esta turma apresentava dificuldades na compreensão dos sentidos da operação aritmética multiplicação. No sentido aditivo, tinham dificuldades em distinguir o significado dos fatores no contexto da tarefa. No sentido combinatório, as dificuldades surgiam quando o número de combinações aumentava e não sabiam como utilizar a multiplicação para calcular as combinações possíveis.

Neste sentido, emergiu a problemática relacionada com o objetivo desta intervenção pedagógica: De que forma se pode integrar a *applet* Multiplicação da Plataforma *Hypatiamat* na sala de aula para promover a compreensão dos sentidos da operação aritmética multiplicação?

A implementação da aprendizagem colaborativa, com recurso à *applet*, exigiu uma estruturação por parte da Professora Estagiária (PE). Desta forma, foram planificadas e implementadas cinco sessões, tendo em conta as AE (ME, 2018) e seguindo o modelo das 4 fases de Canavarro et al. (2012), designadamente: *Introdução da tarefa* (fase 1); *Desenvolvimento da tarefa* (fase 2); *Discussão da tarefa* (fase 3) e, *Sistematização das aprendizagens matemáticas* (fase 4). Cada fase, descreve as ações desenvolvidas pelo professor durante a aula.

A literatura aponta muitas potencialidades em relação ao uso da Plataforma *Hypatiamat* (PH) nos processos de ensino e de aprendizagem matemática, em particular a autonomia dos alunos, a melhoria do seu desempenho, atenção e motivação (Hortênsio, 2020; Pires, 2021; Santos, 2021; Verdasca et al., 2020). A *applet* Multiplicação da PH foi escolhida por permitir aprendizagens efetivas sobre os sentidos da operação aritmética multiplicação.

Assim, esta implementação didática teve como objetivo o aprofundamento dos conhecimentos dos alunos do 2.º ano de escolaridade do 1.º CED sobre os sentidos da operação aritmética multiplicação, com recurso à PH.

2. FUNDAMENTAÇÃO E CONTEXTO

Em qualquer que seja o ciclo de escolaridade, deve-se considerar a utilização de AD no ensino e aprendizagem da Matemática (ME, 2018; ME, 2021). A respeito disto, os AD têm sido destacados e valorizados nas práticas dos professores de Matemática (Costa et al., 2021; Martins et al., 2018; Verdasca et al., 2020).

2.1 Operação aritmética multiplicação

Em termos de modelação de situações, a multiplicação é considerada complexa ao nível cognitivo por estar relacionada a um determinado raciocínio e por conferir novos significados aos números (Ribeiro & Almeida, 2022). Segundo Cosme et al. (2021), a resolução de problemas pode contribuir para a compreensão dos conceitos. Do mesmo modo, Ribeiro e Almeida (2022) consideram que o entendimento dos sentidos da multiplicação deve associar-se à resolução de problemas.

A multiplicação envolve uma relação constante entre duas quantidades (Ribeiro & Almeida, 2022).

Na multiplicação de dois números inteiros, por exemplo $3 \times 2 = 6$, os números 3 e 2 são os fatores e o 6 é o produto (Parker & Baldrige, 2004).

De acordo com Troutman e Lichtenberg (1995), os problemas que envolvem a multiplicação têm três tipos de interpretações: aditivo, fila-por-coluna e combinação. Estas interpretações são consideradas por Ribeiro e Almeida (2022) como: adição sucessiva de parcelas iguais, configuração retangular e combinatória.

De acordo com Loureiro (1997), a adição sucessiva de parcelas iguais associa-se a uma adição repetida (e.g. $2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6$), excluindo o zero como fator. Admitindo a operação $3 \times 2 = 6$, a primeira quantidade corresponde ao número de vezes (3) que se irá repetir a segunda quantidade (2), que se mantém inalterável (Ribeiro & Almeida, 2022). Neste sentido da multiplicação, as representações 3×2 e 2×3 , apesar de apresentarem o mesmo produto (6), têm significados distintos (Ribeiro & Almeida, 2022).

De acordo com Troutman e Lichtenberg (1995), na configuração retangular é determinada a quantidade de elementos dispostos num formato retangular, envolvendo um determinado número de linhas e tendo cada linha o mesmo número de elementos. Novamente, as representações 3×2 e 2×3 têm orientações distintas, uma vez que podem representar respetivamente três colunas com dois elementos ou duas colunas com três elementos (Ribeiro & Almeida, 2022).

No sentido combinatório, está explícita a combinação de elementos de diferentes conjuntos, em que o resultado é a quantidade total das diferentes combinações possíveis (Troutman & Lichtenberg, 1995). Mais uma vez, as representações 3×2 e 2×3 têm significados distintos, na medida em que significam, respetivamente, a combinação de três elementos de um conjunto com dois elementos de outro conjunto, ou “dois elementos de um conjunto com três elementos de outro conjunto” (Ribeiro & Almeida, 2022, p. 102). Conforme Loureiro (1997), a aprendizagem deste sentido da multiplicação pode ser apoiada com a utilização de estratégias de apoio ao cálculo, como por exemplo o uso de quadros de dupla entrada ou um esquema em árvore.

De acordo com Santos (2021) e Ribeiro e Almeida (2022), os alunos apresentam dificuldades associadas aos sentidos da multiplicação.

Na resolução de problemas que envolvem a adição sucessiva de parcelas iguais, é comum os alunos sentirem dificuldades em diferenciar os contextos que indicam, por exemplo, 3×2 e 2×3 . Assim, é importante proporcionar-lhes diferentes situações que envolvam este sentido para que entendam que contextos distintos podem ter produtos iguais (Ribeiro & Almeida, 2022). Na

configuração retangular, os alunos sentem dificuldades em compreender “o uso da informação importante inerente às imagens que acompanham os enunciados” (Ribeiro & Almeida, 2022, p. 110) e as “situações associadas aos números utilizados nos contextos das tarefas” (Ribeiro & Almeida, 2022, p. 110). No sentido combinatório, os alunos sentem dificuldades em compreender de que forma acontecem as combinações e como podem calcular o produto dessas combinações através da multiplicação (Ribeiro & Almeida, 2022).

2.2 Artefactos Digitais

Atualmente, existe uma diversidade de AD direcionada para o ensino da Matemática (Drijvers, 2020). Os AD são considerados como ferramentas de apoio ao ensino e a aprendizagem que podem ser usados para a criação de ambientes estimulantes e desafiantes (Costa et al., 2021; Lopes & Costa, 2021). Seguindo a definição apresentada por Costa et al. (2021), os AD são:

“um tipo de produto de investigação que engloba software (inclui sistemas operativos, utilitários, programas de aplicação, multimédia, jogos de vídeo, sistemas lógicos); Conteúdo do website (inclui conteúdo textual, visual, ou auditivo como parte da experiência do utilizador; informação factual e análise de dados, ou trabalho fictício, imaginativo e/ou criativo, utilizando imagens, vídeo, áudio); meios digitais ou visuais (inclui filmes, documentários, jogos, animações); e conjunto de dados/bases de dados.” (p. 30)

De entre os AD disponíveis para serem utilizados nos processos de ensino e de aprendizagem, a PH tem sido apontada por vários estudos como um AD capaz de promover aprendizagens e contribuir para a motivação e a atenção dos alunos (Hortênsio, 2020; Pires, 2021; Santos, 2021).

De acordo com Pinto et al. (2022), o projeto *Hypatiamat* surgiu com a intenção de contribuir para a melhoria do desempenho escolar dos alunos na Matemática. Este projeto conta com a PH, com múltiplas aplicações hipermédiadas direcionadas para os conteúdos de Matemática do 1.º ao 9.º ano de escolaridade.

Esta plataforma online, contém aplicações de conteúdo que incluem problemas relacionados com os diversos conteúdos da Matemática, jogos sérios, recursos em *pdf* com propostas de atividades, guiões de exploração, propostas de planificação, entre outros materiais orientados para o ensino e aprendizagem da Matemática (Pinto et al., 2022). A plataforma conta ainda com um espaço, denominado de *backoffice*, que permite ao professor monitorizar o trabalho dos alunos e ter um *feedback* formativo do seu desempenho em tempo real (Pinto et al., 2022).

Os AD disponibilizados pela PH são apontados por Pinto et al. (2022) como ferramentas epistémicas que possibilitam ao aluno ter um papel ativo na construção do seu conhecimento, aprender de acordo com o seu ritmo e a autorregular a sua aprendizagem.

Um artefacto digital é considerado como ferramenta epistémica quando a sua utilização promove aprendizagens nos alunos e lhes permite construir o conhecimento de forma ativa (Lopes & Costa, 2019).

Autores como Drijvers et al. (2010), McKenzie (2001) e Tamborg (2021) consideram que a utilização de AD na sala de aula, e como ferramentas epistémicas, requer uma orquestração instrumental por parte do professor. A sua utilização envolve um processo de *gênese*

instrumental durante o qual o artefacto é transformado em instrumento (Carlsen et al., 2016; Drijvers et al., 2010). De acordo com Drijvers et al. (2010), este instrumento resulta da combinação entre o artefacto e os esquemas de instrumentação. O mesmo autor alega que os esquemas de instrumentação interligam os conhecimentos específicos do domínio (por exemplo, conhecimentos matemáticos) e os conhecimentos técnicos sobre o artefacto.

Uma orquestração instrumental, como descrito por Carlsen et al. (2016) e Trouche (2004), é definida por configurações didáticas e pelos seus modos de exploração. Conforme Drijvers et al. (2010) e Teixeira (2016), podemos distinguir três elementos que compõem uma orquestração instrumental utilizada pelos professores quando incluem AD na sala de aula: 1) a configuração didática; 2) o modo de exploração e 3) o desempenho didático. A configuração didática corresponde à organização dos artefactos no ambiente de aprendizagem (por exemplo, a escolha do AD). O modo de exploração refere-se à forma como o professor escolhe explorar a configuração didática de acordo com as suas intencionalidades didáticas. O desempenho didático envolve as decisões tomadas pelo professor no momento da aula (Drijvers et al., 2010; Teixeira, 2016).

De acordo com Lopes e Costa (2019), numa aula com orquestração instrumental existe uma preparação prévia, que resulta da escolha de uma configuração didática (neste caso um AD) e do modo de exploração. Esta preparação está sempre sujeita à componente de desempenho didático, ou seja, às decisões tomadas pelo professor durante a aula (Drijvers et al., 2010; Silva, 2021; Teixeira, 2016).

Conforme Saraiva (2018), as ações do professor, o modo como se apresentam as tarefas e como se concede autonomia aos alunos vai desenvolver ou não as práticas epistémicas dos alunos. Em Santos et al. (2018) estas práticas são apontadas como uma oportunidade para que os alunos desenvolvam competências que poderão ser usadas em diversos contextos e situações.

3. DESCRIÇÃO DA PRÁTICA EDUCATIVA E SUA IMPLEMENTAÇÃO

Os dados recolhidos e aqui apresentados são de uso exclusivo deste estudo, havendo o consentimento autorizado de todos os Encarregados de Educação e do Agrupamento de Escolas. Desta forma, mantém-se o anonimato dos alunos envolvidos.

Nas cinco sessões, os alunos resolveram, na *applet*, diversas situações problemáticas relacionadas com os sentidos da multiplicação. A interação dos grupos com a *applet* gerou um ambiente de aprendizagem colaborativa, com resultados positivos nos conhecimentos de alguns alunos em relação aos sentidos da multiplicação. Um ambiente de aprendizagem colaborativa exige que o professor estruture “a situação de aprendizagem de modo que os estudantes possam assumir o controlo do processo de aprendizagem” (Barkley et al., 2014, p.55). Desta forma, a integração deste artefacto digital, exigiu uma orquestração instrumental por parte da PE. Esta orquestração permitiu ainda uma evolução nas práticas epistémicas dos alunos.

Para identificar as dificuldades dos alunos, os mesmos resolveram um conjunto de situações problemáticas (que apresentamos na Figura 1) relacionadas com os sentidos da multiplicação.

Lê com atenção as seguintes questões. Responde mostrando como pensaste.

1. Ema mudou-se para a sua casa nova e transportou no seu carro os seus vasos de flores. Para isso, fez 3 deslocações, levando 2 vasos de flores de cada vez. Observa.

Primeira deslocação	Segunda deslocação	Terceira deslocação
		

1.1. Quantos vasos de flores levou a Ema, ao todo? Explica como pensaste, usando esquemas, desenhos ou palavras.

2. Em cima da mesa da cantina da escola há 4 pratos com 2 maçãs em cada um dos pratos. Quantas maçãs há ao todo? Explica como pensaste, usando esquemas, desenhos ou palavras.

3. A turma do 2.º C vai colar azulejos na parede do lavatório da sala. A professora explica aos alunos que vão precisar de formar 4 filas, cada uma com 5 azulejos. Quantos azulejos vão precisar os alunos? Explica como pensaste, usando esquemas, desenhos ou palavras.



3. O Tobias vai oferecer um presente de aniversário ao seu irmão, mas está indeciso com o embrulho. Ele tem 2 tipos de papel diferentes e 3 tipos de fitas diferentes. Ele pode escolher apenas um papel de embrulho e uma fita.

Podem escolher:



3.1. De quantas maneiras diferentes pode fazer o embrulho? Explica como pensaste, usando esquemas, desenhos ou palavras.

Figura 1 Situações problemáticas iniciais.

Depois de identificadas as dificuldades, selecionou-se a *applet* Multiplicação no sentido de se superar essas dificuldades.

Assim, foram delineadas cinco sessões de aproximadamente 90 e 120 minutos cada, com foco nos conteúdos referidos anteriormente. Em cada sessão, os alunos resolveram, num ambiente de aprendizagem colaborativa, um conjunto de situações problemáticas (presentes nos *frames* da respetiva *applet*) com recurso a um computador portátil e um guião de exploração. Os *frames* trabalhados nas cinco sessões apresentam-se na Tabela 1.

Tabela 1 - *Frames* trabalhados nas cinco sessões

Sessão	<i>Frames</i> trabalhados
1	1, 2, 3, 4, 5 e 6
2	8, 9 a 19, 28 e 32
3	37, 38, 39, 40 e 41
4	42 e 45 a 54
5	55 e 60

A primeira sessão foi orientada para a adição sucessiva de parcelas iguais (sentido aditivo), a segunda direcionada para a configuração retangular, a terceira e quarta relacionadas com o sentido combinatório da multiplicação e a quinta orientada para a aplicação dos três sentidos da multiplicação.

Em cada sessão, os grupos acediam à *applet* Multiplicação através de um computador portátil e resolviam as situações problemáticas presentes nos *frames*. O guião de exploração próprio de cada sessão (Figura 2) continha as tarefas dos *frames* trabalhados e instruções para que os grupos pudessem ser autónomos na manipulação da *applet* e na resolução das tarefas. Durante a resolução das tarefas, os pares respondiam na *applet* e registavam os seus raciocínios no guião de exploração.

Lê com atenção as seguintes questões. Responde mostrando como pensaste.

55. Preenche os espaços.



Explica como pensaste, usando esquemas, desenhos ou palavras.

Figura 2 Guião de exploração da 5.ª sessão.

Cada sessão foi organizada seguindo o modelo de 4 fases apontado por Canavarro et al. (2012) para uma aula de ensino exploratório. Cada sessão decorreu de modo semelhante entre si, com momentos de introdução das tarefas (fase 1), realização das tarefas (fase 2), partilha e discussão das tarefas (fase 3) e sistematização das aprendizagens Matemáticas (fase 4).

Na fase 1 de cada sessão, a PE propunha as tarefas aos alunos e estabelecia o objetivo da aula. Para tal, lia as informações previamente escritas no quadro branco (Figura 3). Ainda na fase 1, a PE fornecia informações sobre os aspetos operacionais das tarefas, isto é, utilizando o quadro interativo, explicava como deveriam manipular o *frame* para poder responder à tarefa.

Coimbra, 22 de março de 2022

Objetivo da aula: Compreender o sentido combinatorio da multiplicação

Tarefas

- Resolver as frames 37, 38 e 39.
- Ler com atenção as frames 40 e 41.
- Responder na folha antes de validar a resposta no computador.
- Explicar como pensaram no guião de exploração.
- Ler o enunciado com atenção.

Resolução das tarefas: 30 minutos
 Representação: 30 minutos.
 Lintere: 10 minutos.
 Autoavaliação: 5 minutos.

Figura 3 Informações escritas no quadro branco (3.ª sessão).

Na fase 2, cada grupo acedeu à *applet* Multiplicação da PH e resolveu as situações problemáticas presente nos *frames*, respondendo no computador e no guião de exploração. Os alunos explicaram como pensaram no guião de exploração, utilizando esquemas, desenhos ou palavras (Figura 4).

Explica como pensaste em cada  usando esquemas, desenhos ou palavras.


 Eu sei que eram 2 linhas de frascos de leite com morango e também eram duas linhas com frascos de leite com chocolate então ~~eram~~ eram 20 frascos ao todo.

Figura 4 Resolução feita pelo grupo 12 (2.ª sessão).

Durante a fase 2 a PE não corrigiu ou validou as resoluções dos alunos, nem lhes deu as respostas para que não perdessem o interesse no momento de discussão (fase 3) e para que fosse possível realizar um debate em torno das diferentes resoluções (Ribeiro & Almeida, 2022). Desta forma, enquanto os grupos resolviam as tarefas, a PE circulou pela sala de aula para fazer anotações, seleccionar as resoluções dos grupos para a fase seguinte e orientar as dificuldades dos alunos com questões orientadoras, para que pudessem compreender o porquê das suas resoluções e levá-los a autorregular as suas aprendizagens. Ainda na fase 2, a PE foi alertando os alunos para pensarem e resolverem as tarefas de forma colaborativa, isto é, numa base de igualdade, ajudando-se mutuamente para atingir objetivos comuns (Damiani, 2008; Pacheco, 2019).

Em cada sessão, à medida que os grupos iam terminando a resolução das tarefas a PE comunicava que podiam resolver o *frame* 63 (Figura 5).

Completa a tabela

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

PISTA

Completa:

$2 \times 8 =$



Figura 5 Frame 63 da *applet* Multiplicação.

Na fase 3, a PE projetava as resoluções dos grupos selecionados para que pudessem ser apresentadas e discutidas pela turma, de modo a promover o entendimento matemático relacionado com os sentidos da multiplicação (Ribeiro & Almeida, 2022).

Na fase 3 da segunda, terceira, quarta e quinta sessões, a PE esclareceu as dúvidas colocadas pelos alunos no momento de autoavaliação da sessão anterior (Figura 6). As dúvidas foram esclarecidas em grande grupo com recurso aos *PowerPoints* preparados pela PE (Figura 7).

A photograph of a student's handwritten question on lined paper. The text is written in cursive and asks: "Se eu tenho 30 camisolas e tenho 29 calças quantos grupos de camisolas e de calças é que eu posso fazer?"

Figura 6 Questão colocada pelo aluno X (3.ª sessão).

A screenshot of a presentation slide. At the top, it repeats the question: "Se eu tenho 30 camisolas e tenho 29 calças quantos grupos de camisolas e de calças é que eu posso fazer?". Below this, it asks "Quantas camisolas tem?" with a box containing the number 30 and a small icon of a t-shirt. Then it asks "Quantas calças tem?" with a box containing the number 29 and a small icon of pants. In the center, the multiplication equation $30 \times 29 = 870$ is shown with each number in a box. At the bottom, the response is given: "R: Posso fazer 870 grupos de calças e camisolas."

Figura 7 Exemplo de diapositivo criado para o esclarecimento da dúvida do aluno X (4.ª sessão).

Na fase 4, os alunos preenchem individualmente uma folha de sistematização (Figura 8), que abordava os conteúdos desenvolvidos ao longo da aula. Neste momento, a PE ia lendo as informações contidas na folha de sistematização e colocando questões para analisar a compreensão dos alunos acerca dos conteúdos trabalhados durante a sessão. A PE tratou de orientar as respostas dos alunos e fazer uma síntese diretiva dos conteúdos presentes na folha de sistematização.

No final da aula, foi utilizada a Técnica de Avaliação Formativa (TAF) “Bilhetes à Saída” como forma de autoavaliação dos alunos (Lopes & Silva, 2020). Os alunos registavam o que aprenderam, o que não compreenderam e colocavam uma questão que quisesse esclarecer sobre a aula (Figura 9).

Sentido aditivo da operação aritmética multiplicação

Indica que a adição sucessiva de parcelas iguais pode ser representada com uma multiplicação.

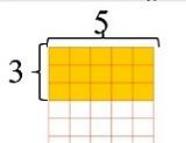
Modelo de grupos



$$2 + 2 + 2 + 2$$

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} =$$

Modelo retangular



$$5 + 5 + 5$$

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} =$$

Sentido combinatório da operação aritmética multiplicação

Está presente quando queremos calcular combinações possíveis.

Pães	Frutas	Bebidas
		

$$\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = 12$$

Multiplicamos o número de elementos de cada grupo envolvido.

Figura 8 Folha de sistematização (5.ª sessão).

Autoavaliação da 1.ª sessão
Nome: _____ Data: _____
Hoje, durante a aula, aprendi:
Hoje, durante a aula, não compreendi:
Uma questão que tenho sobre a aula de hoje é:

Figura 9 Folha de autoavaliação.

Esta TAF foi utilizada para verificar a compreensão dos alunos em relação aos conteúdos trabalhados na aula, dando ao professor um *feedback* sobre o que foi compreendido ou não pelos mesmos. As dificuldades apontadas pelos alunos neste momento de autoavaliação eram depois partilhadas e discutidas com a turma nas sessões seguintes para que fossem esclarecidas.

No final das cinco sessões, os alunos voltaram a resolver um conjunto de situações problemáticas com o objetivo de perceber se as suas dificuldades foram colmatadas (Figura 10).

Lê com atenção as seguintes questões. Responde mostrando como pensaste.

1. A Ana ofereceu todos os seus livros à biblioteca da escola. Para os transportar fez 5 deslocações, levando 7 livros de cada vez. Observa.

1. ^a deslocação	2. ^a deslocação	3. ^a deslocação	4. ^a deslocação	5. ^a deslocação

1.1. Quantos livros levou a Ana, ao todo? Explica como pensaste, usando esquemas, desenhos ou palavras.

2. Em cima da mesa da cantina da escola há 4 pratos com 10 peras em cada um dos pratos. Quantas peras há ao todo? Explica como pensaste, usando esquemas, desenhos ou palavras.

3. A turma do 2.º C é responsável por dispor as mesas da cantina para que os alunos da escola possam almoçar. A professora explica aos seus alunos que vão precisar de formar 5 filas, cada uma com 10 mesas. Quantas mesas vão precisar os alunos? Explica como pensaste, usando esquemas, desenhos ou palavras.

--	--	--	--	--	--	--

4. A Rosa foi lanchar a uma loja de crepes e viu o seguinte cartaz:

Crepes		Recheio					Topin
Crepe simples	Waffle	Morango	Laranja	Chocolate	Quiwi	Limão	Avelã
Crepe de chocolate							Amêndoa

4.1 No cartaz há 3 crepes, 5 recheios e 2 topins diferentes, que podem ser combinados. A Rosa pode escolher apenas, um tipo de crepe, um recheio e um topin. Quantas opções diferentes poderá escolher? Explica como pensaste, usando esquemas, desenhos ou palavras.

Figura 10 Situações problemáticas resolvidas pelos alunos depois das cinco sessões.

4. AVALIAÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO DA PRÁTICA E PRINCIPAIS RESULTADOS

A reflexão sobre a prática educativa é vista como uma ação de melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem (Jesus et al., 2022; R. E. Rodrigues, 2021). Do ponto de vista de Silva (2021), esta ação permite analisar e avaliar os aspetos positivos e negativos e melhorar a prática docente. As gravações realizadas em cada sessão, permitiu à PE avaliar a sua prática e compreender os aspetos que deveriam ser melhorados para que as dificuldades dos alunos, apontadas no momento de autoavaliação, fossem superadas.

A utilização do AD da PH e a orquestração feita pela PE tiveram resultados positivos nos conhecimentos matemáticos de alguns alunos, no que diz respeito aos sentidos da multiplicação. Esses resultados são visíveis nas resoluções das tarefas realizadas pelos alunos antes e depois desta prática educativa (Figuras 11, 12, 13 e 14).

3. A turma do 2.º C vai colar azulejos na parede do lavatório da sala. A professora explica aos alunos que vão precisar de formar 4 filas, cada uma com 5 azulejos. Quantos azulejos vão precisar os alunos? Explica como pensaste, usando esquemas, desenhos ou palavras.

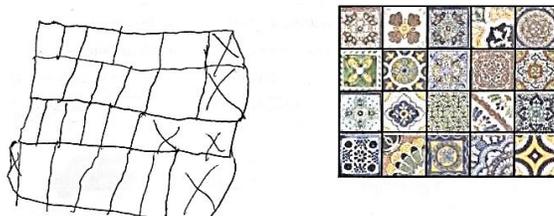


Figura 11 Resolução do aluno L antes da prática.

3. A turma do 2.º C é responsável por dispor as mesas da cantina para que os alunos da escola possam almoçar. A professora explica aos seus alunos que vão precisar de formar 5 filas, cada uma com 10 mesas. Quantas mesas vão precisar os alunos? Explica como pensaste, usando esquemas, desenhos ou palavras.

		5	x	10	=	50				

Figura 12 Resolução do aluno L após a prática.

3. O Tobias vai oferecer um presente de aniversário ao seu irmão, mas está indeciso com o embrulho. Ele tem 2 tipos de papel diferentes e 3 tipos de fitas diferentes. Ele pode escolher apenas um papel de embrulho e uma fita.

Pode escolher:



3.1. De quantas maneiras diferentes pode fazer o embrulho? Explica como pensaste, usando esquemas, desenhos ou palavras.

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$$

Figura 13 Resolução da aluna C antes da prática.

4. A Rosa foi lanchar a uma loja de crepes e viu o seguinte cartaz:

Crepes	Recheio	Topin
 Crepe simples  Waffle  Crepe de chocolate	 Morango  Laranja  Chocolate  Quiwi  Limão	 Avelã  Amêndoa

4.1 No cartaz há 3 crepes, 5 recheios e 2 topins diferentes, que podem ser combinados. A Rosa pode escolher apenas, um tipo de crepe, um recheio e um topin. Quantas opções diferentes poderá escolher? Explica como pensaste, usando esquemas, desenhos ou palavras.

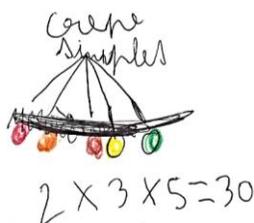


Figura 14 Resolução da aluna C após a prática.

O trabalho de grupo gerado em torno desta *applet* contribuiu para a constatação de momentos de aprendizagem colaborativa em alguns grupos, como por exemplo, entre os alunos R e L que se envolveram de forma ativa e pensaram em conjunto na resolução. Na gravação realizada, é possível evidenciar que a *applet* orientava os alunos para a resposta, por exemplo quando apontam para a operação da adição com espaços em branco presente no *frame*. Verifica-se ainda que as situações problemáticas tinham uma relação entre si quando referem “Como na outra anterior”.

Aluna R: E agora como é que é (pausa)? Ah, já sei, já sei, já sei, já sei.

Aluno L: Três, mais três, mais três, mais três.

Aluna R: É três, mais três, mais três?

Aluno L: Sim, ó (apontando para a operação da adição com espaços em branco presente no *frame*).

Aluna R: Ok.

Aluno L: Como na outra anterior. (referindo-se à situação problemática do *frame* anterior)

Aluna R: Dois, três... (pausa) é doze. (a aluna estava a registar, em simultâneo, a resposta no guião de exploração)

Aluno L: Sim.

Aluna R: E agora, pa ficar aqui doze? (referindo-se à operação da multiplicação) Como é que vamos pensar? (pausa de 15 segundos enquanto os alunos pensavam numa resposta)

Aluno L: Quatro pares de três.

Noutros grupos, houve uma evolução na aprendizagem colaborativa dos alunos, verificando-se nas gravações áudio descritas a seguir.

Aluna M: Deixa-me fazer mais. (pausa de 2 segundos enquanto a Aluna M tenta tirar o computador da Aluna E para responder $4 \times 1 = 4$)

PE: Espera lá, deixa a Aluna... a Aluna E. Ajuda lá a Aluna E. Explica à Aluna E porque é que não é um vezes quatro. (pedindo à Aluna M para explicar à colega o motivo de não ser $1 \times 4 = 4$)

Aluna M: Porque só é uma vez o quatro. (pausa) E é quatro vezes um. (pausa de 6 segundos enquanto a Aluna E insere $4 \times 1 = 4$ no frame)

Aluna E: Quatro vezes um.

PE: Percebeste Aluna E? (a aluna afirmou que sim com a cabeça)

Na descrição acima, é possível verificar a PE a pedir à aluna M para explicar e ajudar a colega (aluna E) a compreender a resolução da tarefa, antes de responder na *applet* da PH. Nas sessões seguintes, observou-se a interação entre as mesmas alunas, verificando-se uma evolução na colaboração.

Aluna E: Quantos frascos estão na sala todo... ao todo?

Aluna M: Vinte.

Aluna E: Vinte? Sim vinte, mas nós temos que fazer aqui uma estratégia.

Aluna M: É duas vezes... não, é quatro vezes o dez, o cinco.

Aluna E: Espera, espera, espera. Quatro vezes?

Aluna M: Sim.

Aluna E: Ah, deve ser quatro vezes, sim!

Quando os alunos sentiam dificuldades na resolução das tarefas a *applet* fornecia-lhes um *feedback* imediato (Figura 15). Esta particularidade permitia ainda a identificação dos grupos que estavam com dificuldades na resolução das tarefas.

O Ricardo retirou mais 1 ovo de cada cesto.

▶ Quantos cestos estão na mesa? ✓

▶ Quantos ovos há, agora, em cada cesto? ✓

E agora? Quantos ovos há ao todo?

+ + + = ✓

ou

× = ✗

Figura 15 Respostas dadas pelo grupo 5 ao frame 5.

Quando a PE identificava um grupo com dificuldades na resolução de uma tarefa, implementava a mediação epistémica para ultrapassar as dificuldades sentidas. No diálogo a seguir, verifica-se que esta mediação era feita com questões orientadoras, levando os alunos a pensar e construir conhecimento.

PE: Porque é que será que está errado?

Aluna E (grupo 5): Era ao contrário? (pausa) Mas, mas a... mas a professora (referindo-se à professora titular de turma) disse que se for ao contrário mesmo assim está bem.

PE: O que é que quer dizer o um? (referindo-se ao fator 1)

Aluna E (grupo 5): Um quer dizer...uma vez.

PE: Uma vez o quê?

Aluna E (grupo 5): O quatro.

PE: Uma vez o quatro. E aqui em cima na adição está uma vez o quatro? (apontando para a resposta $1 + 1 + 1 + 1 = 4$, dada pelo grupo, ao frame 5)

Aluna M (grupo 5): Não. (pausa de 2 segundos)

PE: O que é que este... o que é que temos aqui na adição? (apontando para a adição presente no frame 5)

Aluna E (grupo 5): Eh...na adição?

PE: Sim, aqui na adição. Temos um...

Aluna E (grupo 5): Um mais um mais um mais um.

Aluna M (grupo 5): Que dá quatro.

PE: Que dá?

Aluna M (grupo 5): Quatro.

PE: Quatro. Quatro quê?

Aluna E (grupo 5): Quatro... (pausa de 2 segundos enquanto pensa) ovos.

PE: Quatro ovos, mas aqui nós temos o um a repetir-se quantas vezes? (referindo-se à adição $1 + 1 + 1 + 1 = 4$)

Alunas E e M (grupo 5): Quatro.

PE: Quatro. Então po... porque é que será que aqui está errado? (apontando para a operação da multiplicação $1 \times 4 = 4$ respondida pelo grupo)

Aluna M (grupo 5): Porque assim temos o quatro vezes o um.

PE: O um. Vejam lá se é. (pedindo ao grupo para alterar a ordem dos fatores e validar a resposta)

O momento de autoavaliação despoletou dificuldades na primeira sessão. Os alunos não sabiam autoavaliar-se pois não tinham o hábito de fazê-lo. Desta forma, foi necessário que a PE lhes ensinasse, indo ao encontro do que referem Lopes e Silva (2020). Ao longo das sessões, essa dificuldade foi sendo superada, sendo visível o envolvimento de alguns alunos na criação de questões sobre dúvidas relacionadas com os conteúdos trabalhados nas sessões (Figuras 16 e 17).

Uma questão que tenho sobre a aula de hoje é:	
<i>Se tivesse 20 ovos e 20 ovos e 20 ovos e 20 ovos, quanto dava?</i>	

Figura 16 Dúvida do aluno K.

Uma questão que tenho sobre a aula de hoje é:	
<i>Se eu tivesse 1000 ovos e tinha 999 cascos, quantas combinações posso fazer.</i>	

Figura 17 Dúvida do aluno X.

Em todas as sessões, foi possível observar as ações da PE que tiveram impacto na promoção de práticas epistémicas dos alunos (Rodrigues et al., 2022). Nas suas ações, foram

visíveis a apresentação de tarefas-desafio e o fornecimento de informação na fase 1. Na fase 2, verificou-se a autonomia dada aos alunos e, ao longo das cinco sessões, foi claro o uso do artefacto digital da PH como mediador (Saraiva, 2018). Ao longo das sessões, observou-se o entusiasmo e a motivação dos alunos na utilização desta *applet* da PH. Isto foi visível no envolvimento dos alunos durante a resolução das tarefas e chegou a ser expresso no momento de autoavaliação (Figura 18).

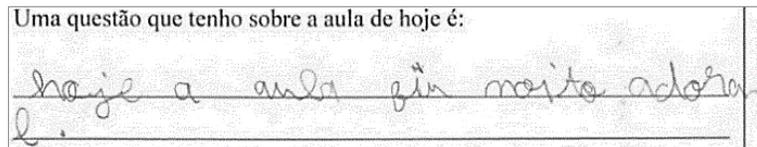


Figura 18 Comentário de uma aluna.

Durante a fase 3, a PE adotou um papel de condução da aula. As apresentações das resoluções dos grupos foram conduzidas com questões, seguindo as características de uma mediação epistémica (Saraiva, 2018). Na fase 4, a PE conduziu as informações presentes na folha de sistematização colocando as questões presentes na folha e orientando as respostas dos alunos (Canavaro et al., 2012; Saraiva, 2018).

5. CONCLUSÕES E IMPLICAÇÕES

A utilização da *applet* Multiplicação da PH e a orquestração feita pela PE contribuíram para a promoção de aprendizagens efetivas sobre os sentidos da multiplicação.

O uso deste artefacto digital no desenvolvimento de aprendizagens nos alunos exigiu uma orquestração instrumental por parte da PE. A mediação epistémica da PE foi determinante no processo de ensino e de aprendizagem. A constante colocação de questões orientadoras levou os alunos a pensar e a construir conhecimento, constatando-se a promoção de práticas epistémicas.

A estruturação da aula seguindo o modelo das 4 fases facilitou a integração da *applet*. Apesar disso, a PE apresentou algumas dificuldades na gestão do tempo e na mediação usada com os diferentes grupos que deverão ser corrigidas em intervenções futuras. A PE teve de gerir vários aspetos em simultâneo, como por exemplo, na fase 2, foi necessário gerir o comportamento dos alunos, as suas dificuldades e identificar e selecionar as resoluções mais pertinentes para a fase de partilha e discussão das tarefas. A gestão simultânea destes aspetos, levou a PE a tomar decisões no momento da aula que poderão ter interferido nas aprendizagens dos alunos, como por exemplo, ultrapassar o tempo destinado à resolução das tarefas. Com efeito, os alunos exploraram o *frame* 63 mais do que o tempo previsto.

O trabalho de grupo gerado em torno desta *applet* da PH fomentou a colaboração entre os grupos, sendo visível na interação dos mesmos durante a fase 2.

A TAF permitiu a recolha de informações sobre as dificuldades dos alunos e sobre os aspetos que deveriam ser melhorados na sessão seguinte. Este instrumento de avaliação incitou os alunos a refletir, a tomar consciência das suas aprendizagens e a ter uma perceção sobre o seu conhecimento. Desta forma, as dificuldades dos alunos em autoavaliarem-se foram superadas.

As situações problemáticas realizadas pelos alunos antes e após as cinco sessões permitiu à PE constatar que alguns alunos superaram as dificuldades sobre os sentidos da multiplicação.

Em futuras práticas letivas, sugere-se que a exploração seja mais estruturada, usando a criação de um roteiro educativo, de modo que os (futuros) professores possam proporcionar momentos de partilha e discussão que potenciem mais oportunidades aos alunos para o aprofundamento do conhecimento sobre os significados da multiplicação.

AGRADECIMENTOS

Ao Instituto de Telecomunicações que financiou parcialmente este trabalho pela FCT/MCTES através de fundos nacionais e quando aplicável cofinanciado por fundos comunitários no âmbito do projeto UIDB/50008/2020. Este trabalho foi realizado no NIEFI - PEAPEA do IPC - ESEC, Bolsa BIC, IPC-ESE/NIEFI/PEAPEA-Grant 1-2022. Este trabalho contou com o apoio do Instituto de Investigação Aplicada (i2A) do Politécnico de Coimbra no âmbito da Dispensa para Investigação Aplicada (Despacho n.º 7333/2020).

REFERÊNCIAS

- Barkley, E., Cross, K., & Major, C. (2014). *Collaborative Learning Techniques: A Handbook for College Faculty*. New York: John Wiley & Sons.
- Canavarro, A., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In L. Santos, A. Canavarro, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática* (pp. 255–266). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.
- Carlsen, M., Erfjord, I., Hundeland, P., & Monaghan, J. (2016). Kindergarten teachers' orchestration of mathematical activities afforded by technology: agency and mediation. *Educational Studies in Mathematics*, 93, 1–17. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9692-9>
- Cosme, A., Lima, L., Ferreira, D., & Ferreira, N. (2021). *Metodologias, Métodos e Situações de Aprendizagem*. Porto Editora.
- Costa, C., Cabrita, I., Martins, F., Oliveira, R., & Lopes, J. (2021). Qual o papel dos artefactos digitais no ensino e na aprendizagem de matemática? In V. Santos, I. Cabrita, T. Neto, M. Pinheiro, & J. Lopes. (Orgs.), *Matemática com vida: diferentes olhares sobre a tecnologia* (pp. 29–44). UA Editora. <http://dx.doi.org/10.48528/vt67-1729>
- Damiani, M. (2008). Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. *Educar em Revista*, (31), 213–230. Scielo. <https://doi.org/10.1590/S0104-40602008000100013>
- Drijvers, P. (2020). Digital Tools in Dutch Mathematics Education: A Dialectic Relationship. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics* (pp. 177–196). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33824-4_10
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75, 213–234. Springer. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5>
- Hortênsio, A. (2020). *A Influência da Plataforma Hypatiamat na Resolução de Situações Problemáticas Envolvendo a Adição e Subtração*. [Relatório final de Mestrado, Escola Superior de Educação de Coimbra]. Escola Superior de Educação de Coimbra.
- Jesus, V., Rodrigues, R., Teixeira, M., Rato, V., & Martins, F. (2022). Análise do conhecimento didático em estatística de professores estagiários através de uma narração multimodal. In F. Martins, R. Pinto, & C. Costa (Eds.),

Artefactos digitais, Aprendizagens e Conhecimentos didático (pp. 96–116). Instituto Politécnico de Coimbra – Escola Superior de Educação de Coimbra.

- Lopes, J. B., & Costa, C. (2019). Digital Resources in Science, Mathematics and Technology Teaching – How to Convert Them into Tools to Learn. In M. Tsitouridou, J. A. Diniz, & T. Mikropoulos (Eds.), *Technology and Innovation in Learning, Teaching and Education* (pp. 243–255). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20954-4_18
- Lopes, J. B., & Costa, C. (2021). Converting Digital Resources into Epistemic Tools Enhancing STEM Learning. In A. Reis, J. Barroso, J. Lopes, T. Mikropoulos, & C. Fan (Eds.), *Technology and Innovation in Learning, Teaching and Education* (pp. 1–18). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-73988-1_1
- Lopes, J. P., & Silva, H. (2020). *50 Técnicas de avaliação Formativa* (2.ª edição). PACTOR.
- Loureiro, C. (1997). Multiplicação, combinatória e desafios. *Educação e Matemática*, (4), 14–16.
- Martins, N., Martins, F., Lopes, B., Cravino, J., & Costa, C. (2018). The Use of Applets in Understanding Fundamental Mathematical Concepts in Initial Teacher’s Training. In M. Tsitouridou, J. A. Diniz, & T. Mikropoulos (Eds.), *Technology and Innovation in Learning, Teaching and Education* (pp. 307–318). http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-20954-4_23
- McKenzie, J. (2001). How teachers learn technology best. *The Educational Technology Journal*, 10(6).
- Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais de Matemática – 2.º ano*. Lisboa: ME.
- Ministério da Educação (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática – 2.º ano*. Lisboa: ME.
- Pacheco, J. (2019). *Trabalho cooperativo e colaborativo no ensino das Ciências Naturais do 2.º Ciclo do Ensino Básico* [Relatório final de Mestrado, Escola Superior de Educação de Viseu]. Repositório Científico do Instituto Politécnico de Viseu.
- Parker, T., & Baldrige, S. (2004). *Elementary Mathematics for Teachers*. Sefton-Ash.
- Pinto, R., Martins, J., & Martins, F. (2022). Projeto Hypatiamat, artefactos digitais para ensinar e aprender matemática. In F. Martins, R. Pinto, & C. Costa (Eds.), *Artefactos digitais, Aprendizagens e Conhecimentos didático* (pp. 10–30). Instituto Politécnico de Coimbra – Escola Superior de Educação de Coimbra.
- Pires, D. (2021). *Adição de Números Naturais usando a Plataforma Hypatiamat*. [Relatório final de Mestrado, Escola Superior de Educação de Coimbra]. Escola Superior de Educação de Coimbra.
- Ribeiro, M., & Almeida, A. (2022). *Atribuir significado aos sentidos e ao algoritmo da multiplicação para a melhoria da qualidade das aprendizagens matemáticas*. Alessandra Almeida.
- Rodrigues, R., Costa, C., Martins, F., & Rey, F. (2022). Ações de uma estagiária na promoção e sustentação de práticas epistémicas. *Revista Practicum*, 7(2), 148–168. <https://doi.org/10.24310/RevPracticumrep.v7i2.13518>
- Rodrigues, R. (2021). *O uso do Tabuleiro Decimal na compreensão dos princípios do sistema de numeração decimal e dos sentidos das operações*. [Relatório final de Mestrado, Escola Superior de Educação de Coimbra]. Escola Superior de Educação de Coimbra.
- Rodrigues, R. E. (2021). *Conhecimento didático de uma educadora estagiária com base numa narração multimodal*. [Relatório final de Mestrado, Escola Superior de Educação de Coimbra]. Escola Superior de Educação de Coimbra.
- Santos, C., Lopes, J., & Cravino, J. (2018). Decisões pedagógicas dos professores e desenvolvimento de práticas epistémicas dos alunos. *Indagatio Didactica*, 10(4), 119–132. <https://doi.org/10.34624/id.v10i4.11165>
- Santos, J. (2021). *O uso da Plataforma HypatiaMat no desenvolvimento do sentido aditivo da multiplicação* [Relatório final de Mestrado, Escola Superior de Educação de Coimbra]. Escola Superior de Educação de Coimbra.
- Saraiva, E. (2018). Investigar práticas epistémicas em aulas de ciências físicas. In J. Lopes, C. Viegas, & A. Pinto (Eds.), *Melhorar Práticas de Ensino de Ciências e Tecnologia* (pp. 157–171). Edições Sílabo.
- Silva, M. (2021). *A orquestração instrumental na elaboração de uma tarefa matemática: conhecimento e práticas profissionais do professor* [Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa]. Universidade de Lisboa.
- Tamborg, A. (2021). Improving mathematics teaching via digital platforms? Implementation processes seen through the lens of instrumental genesis. *ZDM Mathematics Education*, 53, 1059–1071.

<https://doi.org/10.1007/s11858-021-01282-x>

- Teixeira, P., Matos, J., & Domingos, A. (2016). A orquestração instrumental dos recursos tecnológicos no ensino da matemática. In A. Canavaro, A. Borralho, J. Brocardo, & L. Santos (Eds.), *Recursos na Educação Matemática* (pp. 291–302). Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.
- Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281–307. Springer. <https://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5>
- Troutman, A., & Lichtenberg, B. (1995). *Mathematics: A Good Beginning*. Brooks/Cole Publishing Company.
- Verdasca, A., Neves, A., Fonseca, H., Fateixa, J., Procópio, M., & Magro-C, T. (2020). *Melhorar aprendizagens em matemática pelo uso intencional de recursos digitais* (1.ª edição). PNPSE.