

Didática da Matemática na Investigação Multidisciplinar

▪

Fundamentos e Perspetivas

Fernando Martins

Cecília Costa

Rui Mendes

Instituto Politécnico de Coimbra

Escola Superior de Educação

Núcleo de Investigação, Educação, Formação e Intervenção

**Didática da Matemática na
Investigação Multidisciplinar**
·
Fundamentos e Perspetivas

Fernando Martins
Cecília Costa
Rui Mendes

Instituto Politécnico de Coimbra

Escola Superior de Educação

Núcleo de Investigação, Educação, Formação e Intervenção

Ficha técnica

Título. Didática da Matemática na Investigação Multidisciplinar: fundamentos e perspetivas

Autores. Fernando Martins, Cecília Costa & Rui Mendes

Capa, paginação e grafismo. Fernando Martins, Cecília Costa & Rui Mendes

Produção. Instituto Politécnico de Coimbra - Escola Superior de Educação. Núcleo de Investigação, Educação, Formação e Intervenção.

ISBN. 978-989-96927-6-3

Suporte. Eletrónico

Formato. PDF / PDF/A

Coimbra, fevereiro de 2022

Copyright. Todos os direitos reservados ao Instituto Politécnico de Coimbra - Escola Superior de Educação. É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrónico, mecânico, gravação, fotocópia, entre outros), sem permissão expressa do editor e dos autores.

Sobre os autores

Fernando Manuel Lourenço Martins

Doutorado na Área Científica de Matemática, pela Universidade da Beira Interior, desde 2007 e Agregado em Estudos da Criança (Especialidade: Infância, Desenvolvimento e Aprendizagem), pela Universidade do Minho, desde 09/04/2021. É Professor Coordenador do IPC-ESEC desde 2022.

- Ciência ID: 8512-5BB4-6DFD; ORCID ID: 0000-0002-1812-2300; Scopus Author ID: 57217191490.

Maria Cecília Rosas Pereira Peixoto da Costa

Doutorada na Área Científica de Ciências Exatas, Naturais e Tecnológicas – Matemática, pela Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD), desde 2000 e Agregada em Didática de Ciências e Tecnologia (Especialidade: Didática de Ciências Matemáticas), pela UTAD, desde 23/01/2013. É Professora Associada da UTAD-ECT desde 2021.

- Ciência ID: E116-E756-3152; ORCID ID: 0000-0002-9962-562X; Scopus Author ID: 7201473794.

Rui Manuel Sousa Mendes

Doutor em Motricidade Humana, pela Universidade de Lisboa - Faculdade de Motricidade Humana, desde 2000, e Agregado em Ciências do Desporto (Especialidade: Controlo Motor e Aprendizagem), pela Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, desde 23/06/2020. É Professor Coordenador do IPC-ESEC desde 2000.

- Ciência ID: A71F-1E22-D496; ORCID ID: 0000-0002-2433-5193; Scopus Author ID: 54881476100

Agradecimentos

Apoio institucional

- Instituto Politécnico de Coimbra / Escola Superior de Educação de Coimbra / Núcleo de Investigação, Educação, Formação e Intervenção
- Instituto Politécnico de Coimbra, Instituto de Investigação Aplicada, Laboratório RoboCorp
- Instituto de Telecomunicações, Delegação da Covilhã, financiado pela FCT/MCTES através de fundos nacionais e quando aplicável cofinanciado por fundos comunitários no âmbito do projeto UIDB/50008/2020
- Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro / Escola de Ciências e Tecnologia / Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores
- Universidade de Coimbra / Centro de Investigação em Desporto e Atividade Física

Os autores expressam o seu particular agradecimento a todos os investigadores envolvidos nos trabalhos realizados e visados neste livro

Abel Gomes, Acácio Correia, Alfonso Castillo-Rodríguez, Filipe Clemente, Francisco Campos, Frutuoso Silva, Gonçalo Dias, João Pinto, João Sequeiros, José Ribeiro, Micael Couceiro, Nuno Ferreira, Pantelis Nikolaidis, Quoc Nguyen, Ricardo Gomes, Rui Rocha, Sixto González-Víllora, Vasco Lopes, bem como ao Professor José Vitória.

Nota de Abertura

Este ensaio emerge da convicção sobre o valor de se trabalhar em equipas.

Na *Investigação*, estas são, na substância, redes de sabedoria. Geram amplo conhecimento, em particular quando constituídas por especialistas de diferentes origens e distintas motivações.

Tais grupos *Multidisciplinares* libertam-se das amarras e constrangimentos onde cada um dos seus constituintes cresceu.

São mais livres e inovadores, aumentam a probabilidade de todos participarem ativamente e, transformam-se em unidades de cooperação, criação e produção.

O ensino, bem como a aprendizagem, beneficiam da ciência que os fundamentos da *Didática* inspiram. A literatura assim o demonstra, na especialidade da *Matemática* e no quadro do desenvolvimento deste saber na infância.

ÍNDICE

1. Formulação da problemática	1
2. Investigação multidisciplinar	4
3. Contexto da formação de grupos multidisciplinares.....	9
3.1. Grupo multidisciplinar 1	10
3.2. Grupo multidisciplinar 2	11
3.3. Grupo multidisciplinar 3	13
3.4. Grupo multidisciplinar 4	15
4. Descrição de situações de investigação em grupos multidisciplinares.....	18
4.1. Situação de investigação 1.....	18
4.2. Situação de investigação 2.....	20
4.3. Situação de investigação 3.....	23
4.4. Situação de investigação 4.....	25
5. Didática da Matemática na investigação em grupos multidisciplinares	37
5.1. Transposição Didática e o investigador matemático.....	40
5.2. Engenharia Didática e o investigador matemático	43
6. Conclusões	47
Referências bibliográficas	48

1. Formulação da problemática

A formação de grupos multidisciplinares é determinante e fulcral para se conseguir dar resposta a problemas complexos que devido às exigências da investigação só com uma área disciplinar é improvável a sua resolução (Ceballos et al., 2018; Lustig et al., 2015; Zuo & Zhao, 2018). O termo “investigação multidisciplinar” é definido como toda a investigação que inclui mais de uma disciplina (Smith, 2017). Assim, um grupo de investigação multidisciplinar é constituído por um conjunto de especialistas de mais de uma área científica.

Neste ensaio, um investigador no âmbito dos seus trabalhos de investigação em grupos multidisciplinares assume-se como investigador matemático, na perspetiva de ser o investigador da área científica de Matemática. Ao longo do presente ensaio usa-se a designação de investigador matemático apenas neste sentido.

Na sequência do que foi referido, pode-se considerar que basta ser da área científica de Matemática para integrar com sucesso estes grupos de investigação multidisciplinar. Contudo em nosso entender, neste contexto, ao investigador da área científica de Matemática não é suficiente ter conhecimentos de Matemática.

A Didática pode ser considerada como a arte e ciência de ensino e de aprendizagem (Blum et al., 2019, p. 2) e a Didática da Matemática é um domínio que trata de todos os aspetos do ensino e da aprendizagem da matemática (Blum et al., 2019, p. 2; Ponte & Serrazina, 2000, p.13).

Nos estudos da criança, em particular nos que envolvem a matemática elementar, os problemas de investigação são de complexidade elevada e para serem resolvidos com sucesso exigem equipas multidisciplinares (Mazuchi et al., 2020; Sarmiento, 2015; Silva, 2017; Turner & Baker, 2020).

Tendo como ponto de partida o significado de Didática da Matemática, a constatação da complexidade dos problemas de investigação em Ciências do Desporto, em Engenharia e em Estudos da Criança, e o contexto de um investigador matemático que faz parte de diversos grupos de investigação multidisciplinar conduziu-nos à escolha do tema deste ensaio: Didática da Matemática na Investigação Multidisciplinar: fundamentos e perspetivas.

Este ensaio tem como finalidade problematizar o papel da Didática da Matemática na investigação multidisciplinar, tendo como suporte a participação de um investigador como investigador matemático em grupos de investigação multidisciplinar.

Ao longo destes anos, a principal atividade de investigação deste investigador matemático em diversos grupos de investigação multidisciplinar, centrou-se no uso e conceptualização de modelos e processos matemáticos, para a resolução de situações problemáticas, principalmente, no âmbito de investigação em Ciências do Desporto e em Engenharia.

Considerando o contexto em que um investigador matemático tem desenvolvido as suas principais atividades de investigação, emerge o problema de investigação que pretendemos abordar neste ensaio:

Que processos e metodologias do âmbito da Didática da Matemática são integrados no modo como o investigador matemático participa nos grupos de investigação multidisciplinar?

Problema que circunscrevemos com as duas questões de investigação:

1. De que forma as situações de investigação em que o investigador matemático participou em grupos de investigação multidisciplinar evidenciam a integração da Didática da Matemática na investigação multidisciplinar?
2. Como se pode perspetivar o papel do investigador matemático como didata em grupos de investigação multidisciplinar?

Tendo em conta as questões mencionadas formulamos os seguintes objetivos para este ensaio:

1. Refletir acerca da problemática relacionada com a investigação multidisciplinar;
2. Inserir, como ilustração da perspetiva que defendemos, (alguns) contributos de um investigador matemático, enquanto membro de grupos de investigação multidisciplinar;
3. Refletir sobre a integração da Didática da Matemática em grupos de investigação multidisciplinar;

-
4. Perspetivar o papel de um investigador matemático como didata em grupos de investigação multidisciplinar.

De modo a dar cumprimento aos objetivos e dar resposta às questões deste ensaio, organizámos o mesmo em cinco partes:

1. A primeira parte foca a problemática relacionada com a investigação multidisciplinar;
2. A segunda parte está relacionada com a caracterização de quatro dos grupos de investigação multidisciplinar, dos quais fez parte um investigador matemático;
3. Na terceira parte apresentam-se descrições de situações da participação do investigador matemático nesses quatro grupos de investigação multidisciplinar;
4. Na quarta parte enquadra-se as situações descritas com a Transposição Didática e a Teoria das Situações Didáticas de modo a apresentar evidências da integração da Didática da Matemática na investigação multidisciplinar e, também, ainda que modestamente, perspetivar o papel do investigador matemático como didata em grupos multidisciplinares.

Para finalizar este ensaio são apresentadas conclusões que sintetizam respostas às questões formuladas e possíveis implicações da investigação multidisciplinar no desenvolvimento profissional do investigador matemático.

2. Investigação multidisciplinar

Em 2014, no quadro do programa Portugal 2020 a investigação multidisciplinar entra na agenda estratégica nacional (GP, 2014, pp. 115-119; OECD, 2014, p. 197).

Um dos objetivos temáticos do Domínio Competitividade e Internacionalização do programa Portugal 2020 (GP, 2014, p. 117) é o reforço da investigação, do desenvolvimento tecnológico e da inovação, pretendendo-se o aumento da produção científica de qualidade reconhecida internacionalmente, orientada para a especialização inteligente e visando estimular uma economia de base tecnológica e de alto valor acrescentado, privilegiando a excelência, a cooperação e a internacionalização.

É neste contexto que surge a necessidade de resolver problemas complexos que precisarão de mobilizar principalmente diferentes tecnologias, setores, atores de inovação e áreas científicas (OECD, 2014, p. 197).

Assim, hoje em dia, colaboração é uma competência chave na investigação (Ceballos et al., 2018). Atualmente, por exemplo, na evolução da indústria de *software* tem aumentado, entre outros aspetos, a constituição de grupos multidisciplinares e o trabalho colaborativo (Molina et al., 2016). Deste modo, as instituições deverão promover a formação de grupos de investigação multidisciplinares que contenham áreas científicas diferentes (Young, 2015).

O conceito de trabalho em grupo multidisciplinar está bem presente na literatura das Ciências da Saúde e Ciências Sociais, bem como, nas Ciências do Desporto (Roncaglia, 2016).

Uma das principais barreiras no funcionamento dos grupos multidisciplinares está relacionada com uma questão cognitiva exigindo uma compreensão de como ocorrem em grupo a aprendizagem e a criatividade (Pennington, 2011).

Os grupos multidisciplinares serão mais eficazes na prática se as comunidades científicas e as agências de investigação promoverem o incentivo à interação e à integração entre investigadores de diferentes áreas científicas. Isto configura um desafio para os investigadores envolvidos, pois a criatividade e a compreensão dos temas impõem o conhecimento profundo de conceitos, bem como a forma como se

desenvolve o conhecimento para resolver as diversas situações problemáticas (Aderibigbe et al., 2018).

Neste âmbito, emergem as seguintes questões:

1. Quais são os fatores que influenciam a formação, a persistência e o sucesso de um grupo de investigação multidisciplinar?
2. Como deve ser essa colaboração na dinâmica de projetos de investigação multidisciplinar?
3. Como se podem monitorizar grupos de investigação multidisciplinar?

Para dar resposta à primeira questão é essencial identificar fatores que poderão promover uma boa dinâmica de trabalho em grupos multidisciplinares. Nesse sentido, apresentamos os seguintes fatores, segundo Roncaglia (2016, pp. 21-22), como sendo nucleares para o sucesso do trabalho em grupos multidisciplinares:

1. A importância de definir logo no início o papel de cada membro no grupo multidisciplinar;
2. A importância de sustentar o trabalho do grupo multidisciplinar através da definição de valores claros, atitudes e conhecimentos dos elementos do grupo;
3. A importância de estabelecer, desde o início do trabalho do grupo multidisciplinar, um objetivo de partilha e de compromisso, em que todos, embora provenientes de diferentes disciplinas e com diferenciadas competências e capacidades, estejam verdadeiramente de acordo e comprometidos em aderir e trabalhar;
4. A importância de estabelecer um nível de confiança e tolerância na procura de uma verdadeira colaboração e cooperação. Isso incluirá inevitavelmente mal-entendidos, um nível de conflito e diferenças pessoais e profissionais que precisam de ser vistas como geradoras de pensamento criativo, parceria e, por fim, soluções efetivas;
5. A importância de aceitar a mudança dentro de um grupo homogêneo que ainda trabalha em direção a um objetivo comum e consensual;

-
6. A importância de reconhecer diferenças nos estilos de comunicação que precisam ser abertos, transparentes, respeitosos e eficazes;
 7. A importância de abordar preocupações e ambiguidades por meio de oportunidades de colaboração para discutir e, de forma aberta e construtiva, procurar, de imediato e também a longo prazo, formas de as ultrapassar;
 8. A importância de reconhecer (e tolerar) que uma perspectiva individual pode às vezes ser anulada, onde uma opinião individual pode não ser a mais eficaz no momento e pode não refletir um compromisso mais geral para tratar o risco identificado;
 9. Reconhecer e aceitar construtivamente o *feedback* continuará a ser um fator chave de sucesso na manutenção de um trabalho saudável do grupo multidisciplinar;
 10. A importância de reconhecer uma componente do grupo multidisciplinar que destaca a prática reflexiva em ação e o compromisso de trabalhar com modelos novos e mutáveis de educação, saúde e cuidado para a aprendizagem ao longo da vida.

Neste sentido, é evidenciada a importância do papel de cada um dos investigadores e a forma de trabalhar em grupo multidisciplinar.

Dando resposta à segunda questão colocada – Como deve ser essa colaboração na dinâmica de projetos de investigação multidisciplinar? –, a investigação realizada em grupos multidisciplinares “pressupõe uma relação cooperativa e não hegemónica, ou seja, subentende a não hierarquização, controlo, subalternização ou ascendente disciplinar de uns saberes face aos outros” (Tavares, 2017, p. 7). Neste sentido, Tavares (2017) também refere que a forma como os investigadores efetuam as práticas científicas dentro do grupo potenciam ou condicionam o funcionamento do mesmo.

Quando esses grupos de investigação multidisciplinares estão inseridos dentro de um projeto de investigação é preciso criar uma forte dinâmica entre todos os investigadores para alcançar um bom índice de produtividade. Neste sentido, e

segundo Lustig et al. (2015), os princípios orientadores para uma colaboração de sucesso na investigação multidisciplinar em projetos de investigação são os seguintes:

1. Aprender a linguagem;
2. Identificar as diferenças na operação;
3. Fazer um plano operacional;
4. Partilhar o mérito;
5. Partilhar o dinheiro;
6. Discutir o plano do projeto e gestão do tempo;
7. Realizar reuniões frequentes;
8. Incentivar a comunicação aberta: ser justo e respeitador.

Neste sentido, os membros de um grupo de investigação deverão reunir com regularidade uns com os outros para promover a colaboração e garantir que todos têm um entendimento comum dos objetivos de investigação, procedimentos e resultados esperados. Além disso, o grupo beneficiará ao fornecer a cada colaborador acesso a recursos do projeto (e.g., apresentações do grupo, dados e rascunhos, entre outros) (Gee et al., 2017).

Deste modo o valor da colaboração em projetos multidisciplinares estende-se à formação de pessoal altamente qualificado e ao incremento do conhecimento, até mesmo dos especialistas mais experientes envolvidos, podendo influenciar e melhorar a investigação em curso ou no futuro (Lustig et al., 2015).

Em resposta à terceira questão – Como se podem monitorizar grupos de investigação multidisciplinar? –, a forma como se podem monitorizar grupos de investigação é, também, um aspeto que ganhou importância nos últimos tempos (Zilioli et al., 2019).

Neste sentido, Zilioli et al. (2019, pp. 4-5), propõem um modelo designado Sistema de Suporte ao Utilizador cujo objetivo é monitorizar grupos de investigação na partilha de dados, considerando os seus conhecimentos sociais e científicos. Este trabalho centra-se num ambiente de investigação multidisciplinar geoespacial.

Estes autores consideram que a plataforma de ajuda que desenvolveram tem por base os seguintes aspetos:

-
1. Compreender as motivações que podem estimular a partilha ativa de dados e as barreiras a serem superadas para o conseguir;
 2. Promover o diálogo com os investigadores, a fim de chegar a um acordo sobre uma visão realista das suas necessidades e alinhá-las com as diretivas institucionais;
 3. Planificar atividades de formação de acordo com as diferentes habilidades de manipulação de dados (para compensar as lacunas de manipulação de dados pelos diferentes investigadores);
 4. Mediar as interações entre os sujeitos que recolhem dados e os sujeitos que vão gerir os dados para definir uma forma colaborativa de partilha de dados.

No entanto, Zilioli et al. (2019) referem que a ausência de uma categorização clara de funções nos grupos é um obstáculo à execução do perfil do utilizador, dificultando a estratégia de envolvimento e comunicação. Deste modo torna-se essencial na monotorização de grupos multidisciplinares a definição do papel de cada investigador de forma clara (Roncaglia, 2016).

Em síntese, importa na prática formar grupos de investigação multidisciplinar adequados aos desafios que se têm de enfrentar e solucionar. No entanto, permanece desconhecido se um nível mais elevado de multidisciplinaridade dentro de uma instituição académica está associado a colaborações internas que são mais prevaletentes e mais interdisciplinares (Zuo & Zhao, 2018).

Além disso, a colaboração multidisciplinar entre investigadores na prática pode ter alguns problemas. Por exemplo, a colaboração multidisciplinar entre indivíduos com conhecimentos estatísticos e indivíduos da área da saúde é reconhecida na literatura (Altman et al., 2002). No entanto, Altman et al. (2002) referem que “a contribuição estatística para a investigação médica é amplamente recomendada, mas inconsistentemente obtida. Os indivíduos que fornecem tais conhecimentos geralmente não estão envolvidos no processo até a análise dos dados” (p. 2817).

Torna-se assim essencial à colaboração multidisciplinar o *design* do modelo de trabalho implementado no grupo multidisciplinar (Aderibigbe et al., 2018).

3. Contexto da formação de grupos multidisciplinares

O investigador matemático referido no presente ensaio integra vários grupos de investigação. Este investigador faz parte do grupo de Matemática Aplicada do Instituto de Telecomunicações (IT). Além deste faz também parte do Laboratório ROBOCORP do Instituto de Investigação Aplicada, da Unidade de Investigação em Ciências do Desporto (UNICID), do Núcleo de Investigação, Educação, Formação e Intervenção (NIEFI) da, ambos do Instituto Politécnico de Coimbra (IPC).

É neste contexto que o investigador matemático enquadra, fundamentalmente, a sua investigação e tem trabalhado em diversos problemas de investigação em vários grupos multidisciplinares criados para o efeito.

Neste ensaio são considerados quatro exemplos da participação do candidato em grupos de investigação multidisciplinares. Desses quatro exemplos, vai ser desenvolvido de forma mais extensa o quarto, pois nesta situação o investigador matemático foi o responsável desse projeto e, também, pela quantidade de tarefas em que participou quando comparado com o primeiro, segundo e terceiro grupos de trabalho multidisciplinar.

A estrutura da apresentação de cada um dos quatro grupos multidisciplinares, nesta secção, contém os seguintes itens:

1. Motivo da formação do grupo;
2. Membros do grupo;
3. Papel de cada membro do grupo;
4. Conhecimentos dos elementos do grupo;
5. Dinâmica do grupo.

3.1. Grupo multidisciplinar 1

3.1.1. Motivo da formação do grupo

Este grupo multidisciplinar (GMd1) foi formado no âmbito dos trabalhos de um doutoramento para realizar um estudo sobre a estabilidade do algoritmo *Robotic Darwinian Particle Swarm Optimization* (RDPSO).

3.1.2. Membros do grupo:

1. Investigador matemático;
2. Investigador A;
3. Investigador B;
4. Investigador C.

3.1.3. Papel de cada membro do grupo:

1. Investigador matemático: identificar os métodos matemáticos para analisar a estabilidade de equações de diferenças; acompanhar a recolha de dados; análise de dados; colaborar na escrita de artigos científicos.
2. Investigador A: responsável pelo estudo; desenhar e planear o estudo; construção dos robôs físicos; preparação de todo o cenário experimental; acompanhar a recolha de dados; análise de dados; participar na redação de artigos científicos.
3. Investigador B: coorientador de doutoramento do Investigador A; colaborar na escrita de artigos científicos.
4. Investigador C: orientador de doutoramento do Investigador A; colaborar na escrita de artigos científicos.

3.1.4. Conhecimentos dos elementos do grupo:

1. Investigador matemático: estabilidade de equações de diferenças;

-
2. Investigador A: algoritmos evolucionários; robótica cooperativa; *Robotic Darwinian Particle Swarm Optimization*.
 3. Investigador B: Algoritmos Evolucionários; robótica cooperativa.
 4. Investigador C: Robótica móvel; *Particle Swarm Optimization*; robótica cooperativa.

3.1.5. Dinâmica do grupo

As diversas fases do estudo foram planeadas em sessões de trabalho conjunto. Todos os documentos relacionados com o estudo e pesquisas efetuadas foram colocados em pastas partilhadas através da *Dropbox* de modo a agilizar a comunicação entre os elementos do grupo.

O *Skype* foi também usado para facilitar a interação entre os diversos membros do grupo relativamente à tomada de decisão considerando as diversas áreas do saber envolvidas e os objetivos do estudo.

3.2. Grupo multidisciplinar 2

3.2.1. Motivo da formação do grupo

Este grupo multidisciplinar (GMd2) foi formado no âmbito do projeto conducente a um doutoramento em Ciências do Desporto, da Faculdade de Ciências do Desporto e Educação Física da Universidade de Coimbra para realizar um estudo sobre a exatidão e precisão no âmbito da análise do desempenho motor. Este projeto desenvolveu-se no Laboratório ROBOCORP do Instituto de Investigação Aplicada do Instituto Politécnico de Coimbra, de 2010 a 2014.

3.2.2. Membros do grupo:

1. Investigador matemático;
2. Investigador A;

3. Investigador D;

4. Investigador E;

5. Investigador F.

3.2.3. Papel de cada membro do grupo:

1. Investigador matemático: identificar modelos e processos matemáticos para analisar a exatidão e precisão; acompanhar a recolha de dados; efetuar a análise de dados; colaborar na escrita de artigos científicos;
2. Investigador A: participar na construção do cenário experimental e programar em Matlab os modelos matemáticos; colaborar na escrita de artigos científicos;
3. Investigador D: responsável pelo estudo; desenhar e planear o estudo; preparar todo o cenário experimental; acompanhar a recolha e análise de dados; participar na redação de artigos científicos;
4. Investigador E: participar no processo de recolha de dados; colaborar na escrita de artigos científicos;
5. Investigador F: orientador de doutoramento do Investigador D; colaborar na escrita de artigos científicos.

3.2.4. Conhecimentos dos elementos do grupo:

1. Investigador matemático: exatidão, precisão, álgebra linear, séries temporais, séries de Fourier e matriz de covariâncias;
2. Investigador A: programação em *Matlab* e lógica *fuzzy*;
3. Investigador D: avaliação do desempenho motor do *putting*, sistemas dinâmicos;
4. Investigador E: organização de base de dados em Excel.
5. Investigador F: controlo motor e aprendizagem.

3.2.5. Dinâmica do grupo

As diversas fases do estudo foram planeadas em sessões de trabalho conjunto. Todos os documentos relacionados com o estudo e pesquisas efetuadas foram colocados em pastas partilhadas através da *Dropbox* de modo a agilizar a comunicação entre os elementos do grupo.

O *Skype* foi também usado para facilitar a interação entre os diversos membros do grupo relativamente à tomada de decisão considerando as diversas áreas do saber envolvidas e os objetivos do estudo.

3.3. Grupo multidisciplinar 3

3.3.1. Motivo da formação do grupo

Este grupo multidisciplinar (GMd3) foi formado para realizar um estudo sobre a atividade física de estudantes na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra (ESE – IPC). Este estudo desenvolveu-se no Laboratório ROBOCORP do Instituto de Investigação Aplicada do Instituto Politécnico de Coimbra, de 2015 a 2016.

3.3.2. Membros do grupo:

1. Investigador matemático;
2. Investigador E;
3. Investigador F;
4. Investigador G.

3.3.3. Papel de cada membro do grupo:

1. Investigador matemático: identificar e compreender os métodos estatísticos que são adequados no âmbito do estudo; acompanhar a recolha de dados; preparar

a base de dados no *software IBM-SPSS*; analisar os dados; colaborar na redação de artigos científicos;

2. Investigador E: responsável pelo estudo; desenhar e planear o estudo; acompanhar a recolha de dados; participar na redação de artigos científicos;
3. Investigador F: acompanhar o processo de recolha de dados com os acelerómetros; colaborar na escrita de artigos científicos.
4. Investigador G: participar na conceção do estudo e na redação de artigos científicos;

3.3.4. Conhecimentos dos elementos do grupo:

1. Investigador matemático: estatística descritiva e inferencial; construção de base de dados e análise de dados com o *software IBM-SPSS*;
2. Investigador E: condição física; avaliação de condição física;
3. Investigador F: acelerometria; avaliação de desempenho; fisiologia do desporto.
4. Investigador G: fisiologia do exercício;

3.3.5. Dinâmica do grupo

Foram efetuadas sessões de trabalho conjunto para se planear as diversas fases do estudo. Para facilitar a comunicação existiam pastas partilhadas através da *Dropbox* onde se encontravam todos os documentos relacionados com o estudo e pesquisas efetuadas. Existia também um grupo no *Skype* para facilitar a interação entre os diversos membros no que toca à tomada de decisão considerando as diversas áreas do saber envolvidas e os objetivos do estudo.

3.4. Grupo multidisciplinar 4

3.4.1. Motivo da formação do grupo

Este grupo multidisciplinar (GMd4) foi formado para resolver algumas tarefas, tendo como base a aplicação da teoria de grafos, no âmbito do projeto intitulado *Ultimate Performance Analysis Tool* (*uPATO*¹), desenvolvido no Laboratório *Applied Mathematics* da delegação da Covilhã do Instituto de Telecomunicações da Universidade da Beira Interior, de 2016 a 2019.

3.4.2. Membros do grupo:

1. Investigador matemático;
2. Investigador E;
3. Investigador H;
4. Investigador I;
5. Investigador J.

3.4.3. Papel de cada membro do grupo:

1. Investigador matemático, Investigador Responsável pelo projeto *uPATO* em que este grupo multidisciplinar se enquadra: identificar e compreender os modelos matemáticos da teoria de grafos adequados ao contexto de desportos coletivos; acompanhar os bolsiros de investigação relativamente à implementação desses modelos matemáticos; acompanhar o processo de interpretação dos resultados obtidos através desses modelos matemáticos no contexto do desporto; colaborar na escrita de publicações científicas;
2. Investigador E: pesquisar sobre avaliação de redes em desportos coletivos; construir uma interpretação numa linguagem mais perceptível no contexto

¹ <https://www.it.pt/Projects/Index/4298>

desportivo de valores obtidos através de modelos matemáticos; colaborar na escrita de publicações científicas;

3. Investigador H: acompanhar os bolsheiros de investigação no que diz respeito às tarefas relacionadas com a área de informática; colaborar na escrita de publicações científicas;
4. Investigador I: bolsheiro de investigação (Mestre em Engenharia Informática) tendo por função desenhar e desenvolver uma solução cliente-servidor para a ferramenta *uPATO*, permitindo que a mesma fique disponível na *cloud* ou na *Web*, de forma a ficar acessível através de dispositivos móveis e da Internet; colaborar na escrita de publicações científicas;
5. Investigador J: bolsheiro de investigação (Mestre em Engenharia Informática e a efetuar o Doutoramento em Engenharia Informática) tendo por função codificar os modelos matemáticos de avaliação de uma rede e sua representação gráfica quando adequado; colaborar na escrita de publicações científicas.

3.4.4. Conhecimentos dos elementos do grupo:

1. Investigador matemático: teoria elementar de grafos;
2. Investigador E: análise de jogo; jogos coletivos; análise de desempenho de equipas de desportos coletivos;
3. Investigador H: redes; programação em *Python*;
4. Investigador I: programação em *Python*;
5. Investigador J: programação em *Python*.

3.4.5. Dinâmica do grupo

Realizou-se todas as semanas pelo menos uma sessão de trabalho conjunto para se fazer uma análise à realização das tarefas em desenvolvimento. Para além disso, existia um acompanhamento permanente aos bolsheiros tanto no que diz respeito à programação, como na ajuda à compreensão dos modelos matemáticos a implementar.

Para facilitar a comunicação foram criadas pastas compartilhadas através da *Dropbox* onde se encontrava todo o trabalho desenvolvido e pesquisas efetuadas. Existiam também grupos de trabalho através do *Skype* para facilitar a interação entre os diversos membros no que toca à tomada de decisão considerando as diversas áreas do saber envolvidas e o objetivo do projeto.

4. Descrição de situações de investigação em grupos multidisciplinares

As quatro situações de investigação selecionadas são representativas das diferentes situações em que o investigador matemático tem participado e estão diretamente relacionadas com os grupos multidisciplinares apresentados na secção 3.

A estrutura da descrição de cada uma das quatro situações de investigação em grupos multidisciplinares contém os seguintes itens:

1. Contextualização da situação problemática;
2. Problema de investigação;
3. Metodologia de investigação;
4. Papel do investigador matemático na situação de investigação.

4.1. Situação de investigação 1

4.1.1. Contextualização da situação problemática

A navegação de grupos de robôs, especialmente de forma cooperativa, tem sido um dos campos em que se beneficiou da inspiração da Biologia (Bonabeau et al., 1999). Deste modo o algoritmo *Robotic Darwinian Particle Swarm Optimization (RDPSO)* é o mais apropriado para que a cooperação entre os robôs seja a mais adequada a situações reais. Este modelo matemático permite representar como se move cada robô num espaço multidimensional através de um sistema de equações de diferenças (Couceiro et al., 2012a).

Neste sentido colocou-se a questão principal: entre que valores podem variar os parâmetros do algoritmo *RDPSO* de modo que os robôs cooperem para alcançar a melhor solução?

Uma maneira de analisar a convergência do algoritmo consiste em ajustar os parâmetros com base em restrições físicas de robôs móveis ao procurar a melhor solução. Por outras palavras, os robôs precisam de reduzir suavemente a sua velocidade (ou seja, desacelerar) ao convergir para uma determinada solução (Couceiro et al., 2012a).

Deste modo pretende-se encontrar modelos matemáticos que permitam determinar entre que valores os parâmetros do algoritmo RDPSO podem variar independentemente do tipo de robôs que tenhamos, garantindo que estes encontram a melhor solução. Ou seja, de acordo com a Figura 1, são os valores que permitirão que todos os robôs procurem encontrar a zona da solução “global optimum”.



Figura 1. Cenário experimental.

4.1.2. Problema de investigação

Qual o domínio de atração para o *RDPSO* em que os seus parâmetros podem ser definidos de forma que os robôs encontrem a solução ideal evitando obstáculos e assegurando a conectividade do grupo?

4.1.3. Metodologia de investigação

Considerando os objetivos deste estudo piloto foram seguidos os princípios de uma investigação de natureza quantitativa (Cohen et al., 2018).

4.1.4. Papel do investigador matemático nesta situação

O investigador matemático, começou por identificar os modelos e processos matemáticos que se iriam usar tendo em conta o problema definido em 4.1.2.

Após esta tarefa, o investigador matemático, participou em sessões de trabalho conjunto com os restantes membros do grupo, onde numa primeira fase apresentou os métodos matemáticos contextualizando-os com os objetivos deste estudo. Participou nas experiências da avaliação dos parâmetros numa população de robôs móveis físicos para diferentes valores do alcance da comunicação em que os parâmetros estavam limitados de acordo com as soluções obtidas através dos modelos matemáticos para análise da estabilidade de equações de diferenças.

Para a preparação prévia dessas sessões de trabalho o investigador matemático recorreu a algumas referências bibliográficas consideradas fundamentais e adequadas como ponto de partida ao aprofundamento dos conhecimentos, nomeadamente (Barnett, 1983) e (Elaidy, 2005).

Numa segunda fase, o investigador matemático mediou momentos de discussão e reflexão de modo que os métodos matemáticos fossem adequados à resolução da situação problemática definida. No decorrer do estudo, participou na escrita de três artigos científicos: (Couceiro, Martins, Rocha, et al., 2014), (Couceiro et al., 2012a) e (Couceiro et al., 2012b).

4.2. Situação de investigação 2

4.2.1. Contextualização da situação problemática

A análise do desempenho motor quanto à exatidão e precisão é extremamente importante no processo de aprendizagem de habilidades motoras com um alvo definido (Chen et al., 2019; Daou et al., 2019; Guo & Raymond, 2010; Kumar et al., 2017).

Neste sentido a avaliação do nível de desempenho motor através da exatidão e precisão tem sido efetuada até à atualidade em diversos contextos, tais como no desportivo (e.g. Dias et al., 2014; Mendes et al., 2012) e no educativo em diferentes faixas etárias (e.g. Daou et al., 2019; Drews et al., 2013; Mazuchi et al., 2020; Milenkovic & Stanojević, 2013).

Recuando até 2010 e considerando a Figura 2, o GMd2 participou num estudo de doutoramento cujo trabalho teve como finalidade verificar se a manipulação de constrangimentos relevantes no desempenho motor do *putting*², em diferentes condições de variabilidade de prática (i.e., distância, inclinação e ângulo) resulta em diferenças intra e inter-individuais significativas ao nível da amplitude, velocidade, aceleração e tempo de duração deste movimento, confirmando uma possível interação dinâmica entre o praticante, o envolvimento e a tarefa.

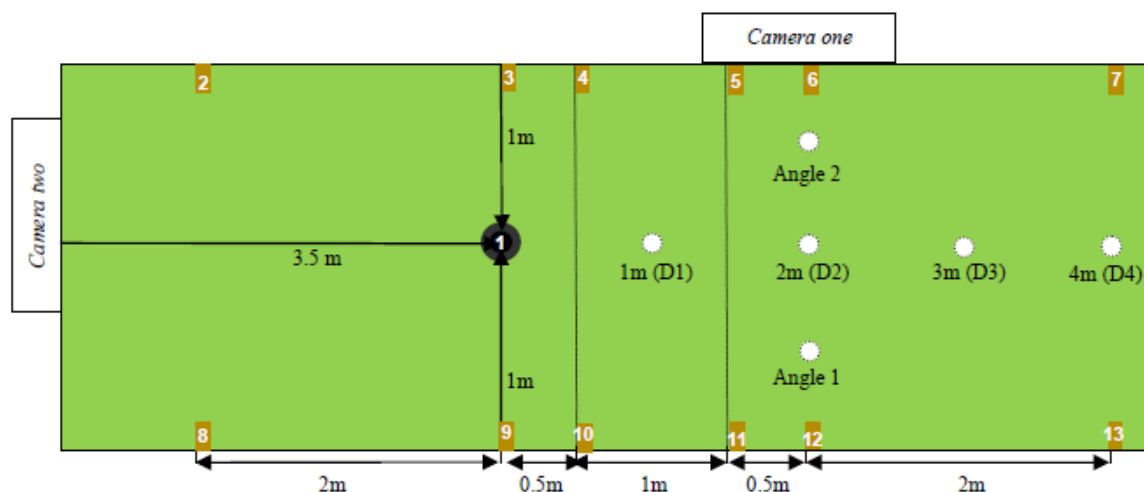


Figura 2. Esquema do cenário experimental.

Para este ensaio iremos apenas focar-nos na problemática relacionada com a avaliação do nível de desempenho motor usando a exatidão e precisão.

Tendo em conta a problemática mencionada surgiram as seguintes questões:

1. Qual o procedimento para analisar a tendência do desempenho motor quanto à exatidão durante uma sequência de ensaios?
2. Que modelos matemáticos se podem desenvolver para determinar o valor que melhor representa o nível de desempenho quanto à exatidão nesta tarefa motora?

² O *putting* é um movimento que consiste em bater com um taco (*putter*) a bola de golfe para que esta acerte dentro de um buraco (*hole*).

3. Que modelos matemáticos se podem desenvolver para determinar o valor que melhor representa o nível de desempenho quanto à precisão nesta tarefa motora?

Para responder à problemática apresentada, pretendeu-se encontrar novos processos e modelos matemáticos para avaliar o desempenho motor de forma adequada quanto à exatidão e à precisão da resposta motora do golfista.

4.2.2. Problema de investigação

Quais os modelos matemáticos e procedimentos que melhor se ajustam à análise da exatidão e da precisão do nível de desempenho motor aquando da realização de uma tarefa motora com um alvo definido?

4.2.3. Metodologia de investigação

Considerando os objetivos deste estudo piloto foram seguidos os princípios de uma investigação de natureza quantitativa (Cohen et al., 2018).

4.2.4. Papel do investigador matemático nesta situação

O investigador matemático, começou por identificar os modelos e processos matemáticos que se iriam usar tendo em conta o problema definido em 4.2.2.

Após esta tarefa, o investigador matemático, participou em sessões de trabalho conjunto com os restantes membros do grupo, onde numa primeira fase apresentou os métodos matemáticos contextualizando-os com os objetivos deste estudo.

Para a preparação prévia dessas sessões de trabalho o investigador matemático considerou referências bibliográficas fundamentais e adequadas como ponto de partida ao aprofundamento dos conhecimentos relacionados com a análise do desempenho motor através da exatidão e precisão (Diniz et al., 2007; Guo & Raymond, 2010; Instituto Português da Qualidade, 2008; Jolliffe, 2002; Lima, 2014; Maor, 2002; Verbesselt et al., 2010; Vitória & Lima, 1998).

Numa segunda fase, o investigador matemático mediou momentos de discussão e reflexão com os restantes membros do grupo, de modo que os métodos matemáticos fossem adequados à resolução das situações problemáticas formuladas. No decorrer do estudo, participou na escrita de artigos científicos (Couceiro, Martins, Clemente et al., 2014; Dias et al., 2014).

4.3. Situação de investigação 3

4.3.1. Contextualização da situação problemática

A atividade física tem um papel preponderante para a promoção da saúde e bem-estar e tem sido uma preocupação da organização mundial de saúde (WHO, 2010). Nesse sentido esta organização elaborou recomendações sobre a intensidade de atividade física que diversas faixas etárias deveriam realizar no sentido preventivo de eventual aparecimento de problemas de saúde (WHO, 2010).

O interesse particular nos estudantes do ensino superior está relacionado com o facto de este grupo populacional ser o principal segmento da população jovem e estar num período da sua vida em que ocorrem modificações, nomeadamente, no estilo de vida e nos hábitos de saúde (Varela-Mato et al., 2012).

A partir da revisão de literatura efetuada não se encontraram estudos sobre este grupo da população em Portugal acerca do estilo de vida e dos hábitos de saúde. Constatou-se também que existia pouca informação sobre a influência de os estudantes serem atletas ou não atletas, sobre os níveis de atividade física e intervalos referentes ao excesso de peso corporal e obesidade (Clemente et al., 2016b).

Além disso, também não é claro se existe um efeito da variável género sobre os níveis de atividade física e intervalos referentes ao excesso de peso corporal e obesidade (Clemente et al., 2016b). Todas estas dúvidas estão relacionadas com os instrumentos de recolha de dados, pois têm sido usados, principalmente, questionários. Neste contexto, colocou-se a questão: que instrumentos podem ser usados para recolher dados que permitam ter informações mais fiáveis sobre níveis de atividade física?

Os acelerómetros são instrumentos consensuais na literatura para fazer uma avaliação mais fiável dos níveis de atividade física (Arias-Palencia et al., 2015; Dinger & Behrens 2006; Peterson et al., 2015).

Assim, surgiram as seguintes questões:

1. Estarão os estudantes da ESE-IPC a cumprir as recomendações da organização mundial de saúde?
2. Que níveis de atividade física são alcançados pelos estudantes da ESE-IPC durante os dias de semana e ao fim de semana?
3. Qual será a realidade relacionada com o excesso de peso corporal e obesidade?
4. Quais os métodos estatísticos mais adequados para analisar a interação entre género (masculino e feminino) e os momentos semanais (dias da semana e fim de semana) sobre as variáveis antropométricas (peso, altura, índice de massa corporal e percentagem de massa gorda) e as variáveis de atividade física (sedentária, ligeira, moderada e vigorosa – em minutos; número de passos)?
5. Quais os métodos estatísticos mais adequados para analisar a interação entre género (masculino e feminino) e tipo de estudante (atleta e não atleta) sobre as mesmas variáveis dependentes?

4.3.2. Problema de investigação

Qual o efeito do momento semanal (dias da semana e fim de semana) e tipo de estudante (atleta e não atleta) nas variáveis antropométricas (peso, altura, índice de massa corporal e percentagem de massa gorda) e nas variáveis de atividade física (sedentária, ligeira, moderada e vigorosa – em minutos; número de passos), em estudantes do ensino superior?

4.3.3. Metodologia de investigação

Considerando os objetivos deste estudo piloto foram seguidos os princípios de uma investigação de natureza quantitativa (Creswell, 2014).

4.3.4. Papel do investigador matemático na situação de investigação

O investigador matemático, começou por identificar os métodos estatísticos que se iriam usar considerando o problema definido em 4.3.2. Tendo em conta os métodos estatísticos identificados e os seus conhecimentos de usabilidade do *software IBM-SPSS* desenhou uma estrutura de base de dados para introduzir os dados após a sua recolha.

A seguir a estas tarefas, o investigador matemático, participou em sessões de trabalho conjunto com os restantes membros do grupo, onde numa primeira fase apresentou os métodos estatísticos contextualizando-os com os objetivos deste estudo. Além disso, apresentou a estrutura de base de dados adequada aos métodos definidos considerando todas as variáveis usadas no estudo.

Para a preparação prévia dessas sessões de trabalho o investigador matemático considerou algumas referências bibliográficas consideradas fundamentais e adequadas como ponto de partida ao aprofundamento dos conhecimentos relacionados com a construção de uma base de dados e análise de dados com o *software IBM-SPSS* e com os métodos estatísticos selecionados (Laureano, 2011; Marôco, 2011; O'Donoghue, 2012).

Numa segunda fase, o investigador matemático mediou momentos de discussão e reflexão de modo que os métodos estatísticos, a estruturação da base de dados e a interpretação dos resultados no contexto desportivo fossem adequados à resolução da situação problemática definida. No final do estudo, participou na escrita de dois artigos científicos (Clemente et al., 2016a; Clemente et al., 2016b).

4.4. Situação de investigação 4

4.4.1. Contextualização da situação problemática

Os desportos coletivos são sistemas complexos e dinâmicos que dependem de interações permanentes entre os jogadores (Clemente, Martins, et al., 2016, p.1).

Desde há alguns anos até à atualidade, a análise de redes tem sido aplicada, principalmente, em contexto de desportos coletivos (e.g. Clemente, Martins et al.,

2016; Korte & Lames, 2019; Laporta et al., 2019; Martínez et al., 2020; Ramos et al., 2018; Ribeiro et al., 2017; Wu et al., 2020).

Na terminologia da área de informática ou da matemática, nomeadamente teoria de grafos, as redes são constituídas por nós e arestas. No contexto de desportos coletivos, os nós da rede podem ser a posição tática ou um jogador.

As interações são definidas pelo analista de jogo. No entanto, a interação mais definida no âmbito dos desportos coletivos é o passe efetuado de uma posição tática para outra ou de um jogador para outro, considerando que o sentido da ação conta.

A rede é o que representa todas as interações ocorridas entre os nós definidos pelo analista de jogo. Se a interação que for considerada é entre posições táticas, temos uma análise sobre os padrões de jogo e organização coletiva da equipa. Por outro lado, se a interação que for considerada é entre jogadores, temos uma análise sobre a contribuição específica de um jogador para a rede (Clemente, Martins, et al., 2016, p.43).

Assim, o analista de jogo pode usar um sistema observacional criado por ele. No entanto, como é que esse analista garante uma recolha e análise de dados que lhe permitam em tempo real dar informações ao treinador sobre o decorrer de um jogo ou durante um treino?

Na literatura podemos ver que as soluções que se encontram disponíveis não respondem a esta questão (Silva, Nguyen, et al., 2019, pp. 1-3), fundamentalmente porque não têm a possibilidade de criar a rede dependendo do tipo de interação escolhida e respetivos modelos matemáticos num contexto adequado aos desportos coletivos.

Deste modo, na Figura 3 podemos observar a situação problemática inicial que o investigador da área de Ciências do Desporto coloca ao investigador informático e ao investigador matemático, tendo por objetivo otimizar, no contexto de desportos coletivos, o tempo de análise e a eficácia da mesma em tempo real ou a partir do visionamento de um vídeo.

Posteriormente, surgiram outras questões:

1. A rede será um grafo, um dígrafo, um grafo ponderado ou um dígrafo ponderado?

2. Existirá a possibilidade de à medida que a criação da rede se faz, fazer a respetiva representação?
3. Que modelos matemáticos se podem implementar, de forma adequada, para efetuar análise de desempenho individual e coletivo no contexto de desportos coletivos?
4. Será possível determinar o valor de modelos matemáticos de análise de desempenho individual e coletivo de uma rede com a mesma ferramenta?

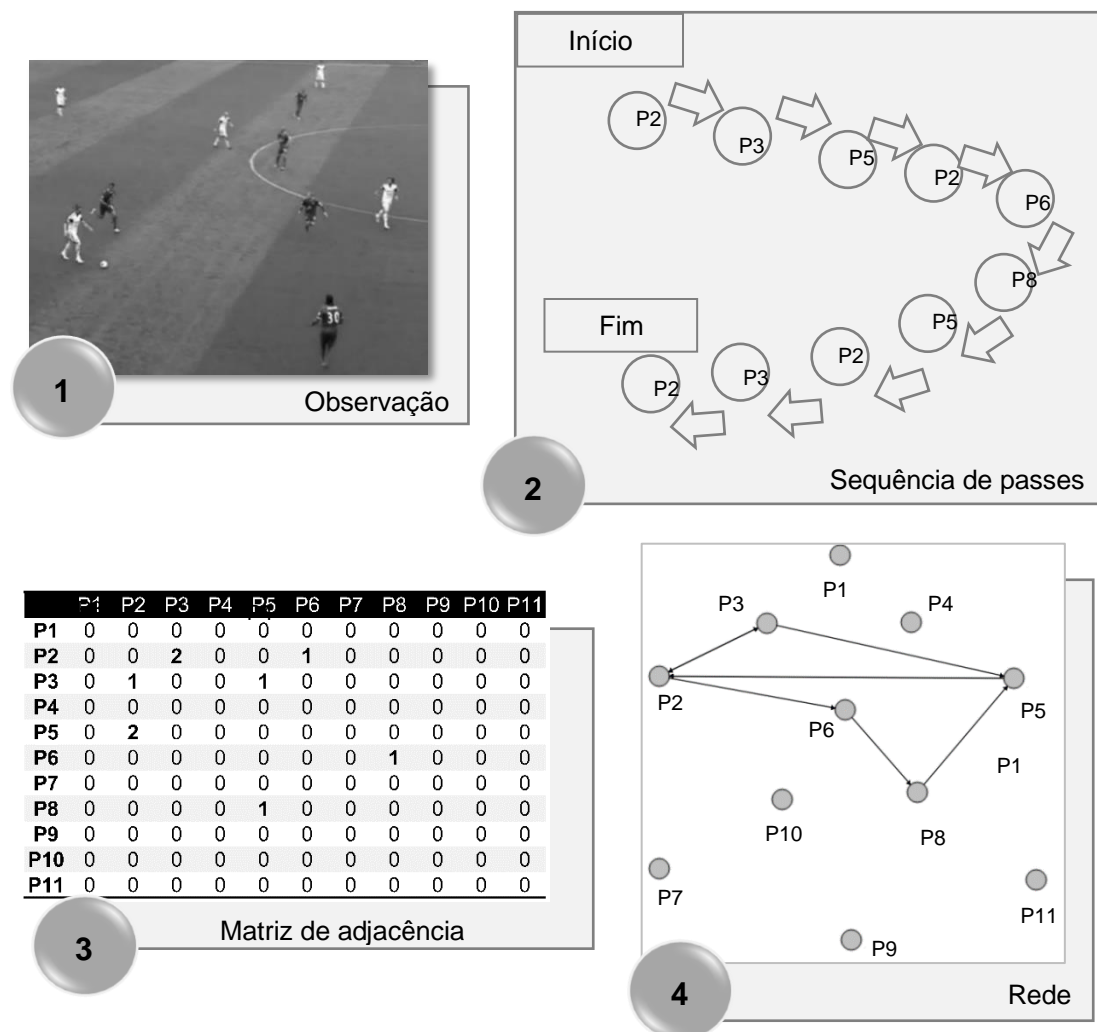


Figura 3. Exemplo da análise de uma jogada de um jogo de futebol: 1) observação da jogada; 2) registo de toda a sequência de passes de uma jogada; 3) construção de uma matriz de adjacência; e 4) representação gráfica da jogada.

4.4.2. Problema de investigação

Que ferramenta informática pode ser desenvolvida de modo que integre a criação de uma rede em tempo real ou a partir de um vídeo, bem como a determinação de valores de desempenho individual e coletivo através de modelos matemáticos adequados a desportos coletivos e à representação desses resultados?

4.4.3. Metodologia de investigação

Considerando os objetivos do projeto *uPATO* foi seguida a metodologia *Design-Based Research (DBR)*, considerando os princípios de Reeves (2006) para a sua implementação:

1. Analisar o problema: ao longo desta fase procura-se definir o problema de investigação e estudar o que já foi feito no mesmo campo de pesquisa ou em áreas similares;
2. *Design* e desenvolvimento de soluções: a segunda fase tem como foco o *design* e desenvolvimento de potenciais soluções para o problema de investigação, suportados por princípios de *design* existentes e inovações tecnológicas relevantes;
3. Implementação da solução: a potencial solução encontrada na fase anterior é implementada e avaliada. Através de um conjunto de ciclos iterativos de intervenção, são recolhidos dados que permitem avaliar e melhorar a solução encontrada ou, se necessário, proceder ao seu *redesign*;
4. Reflexão e avaliação: a quarta fase corresponde ao processo de reflexão e avaliação global do estudo, onde se procura aferir se a solução ou a intervenção responde ao problema de investigação. Caso a resposta encontrada seja satisfatória, o processo de investigação culmina com a partilha com a comunidade científica e educativa, contudo, se tal não se verificar, o processo iterativo de *redesign* prossegue.

Assim, com a concretização das quatro etapas da metodologia *DBR* o investigador matemático, enquanto responsável pelo projeto, teve como objetivo que a construção

da ferramenta informática fosse o mais adequada possível à avaliação do desempenho em contextos desportivos coletivos.

4.4.4. Papel do investigador matemático na situação de investigação

Neste grupo o investigador matemático assumiu dois papéis:

1. Como investigador responsável do projeto *uPATO*;
2. Como investigador matemático inserido no grupo multidisciplinar GMd3.

No âmbito de investigador responsável pelo projeto *uPATO*, o investigador matemático procurou promover sempre a colaboração entre todos os elementos do grupo de modo que com os diferentes saberes se pudesse construir uma ferramenta informática, tendo em conta o público alvo.

A construção desta ferramenta procurou respeitar princípios de boa usabilidade para fazer análise de jogo e que a mesma permitisse através de modelos matemáticos de redes analisar o desempenho individual e coletivo de uma equipa de um desporto coletivo. Para isto foram efetuadas muitas sessões de trabalho entre todos os membros, reuniões semanais e acompanhamento diário por Skype.

O investigador matemático teve um papel ativo na implementação da metodologia *DBR* segundo os princípios de Reeves (2006), como referido em 4.4.3, durante a execução do projeto *uPATO*.

No que diz respeito ao primeiro princípio da *DBR*, o investigador matemático fez a análise do problema e do seu contexto em colaboração com os restantes membros do GMd4; revisão de literatura sobre teoria de grafos aplicado aos desportos coletivos; identificação de ferramentas que permitissem efetuar a representação de grafos e cálculos que avaliem os diversos tipos de redes. Com base na informação recolhida estabeleceu-se um ponto de partida para a procura de possíveis soluções para o problema estabelecido.

Neste princípio da *DBR*, o investigador matemático, começou por identificar modelos matemáticos de redes que se iriam trabalhar tendo como ponto de partida o trabalho desenvolvido por Clemente, Martins e Mendes (2016). Posteriormente, através de

literatura científica relacionada com a teoria de grafos, procurou mais informações que pudessem ser determinantes tanto para o seu cálculo como para a sua interpretação em contexto.

No segundo princípio, da *DBR*, foi desenhada e desenvolvida uma ferramenta informática *uPATO* para criar uma rede em tempo real ou a partir de um vídeo, bem como permitir o uso de modelos matemáticos de rede adequados a desportos coletivos e a representação dos valores obtidos através desses modelos. Deste modo alcançamos numa primeira fase o protótipo *uPATO* (Figura 4), sendo esta uma versão evoluída do protótipo anterior *PATO* (Clemente, Silva, et al., 2016).



Figura 4. Protótipo *uPATO*.

Neste princípio da *DBR*, o investigador matemático, após as tarefas mencionadas no primeiro princípio, participou em sessões de trabalho conjunto com os restantes membros do grupo, onde:

1. Numa primeira fase apresentou o modelo matemático e exemplificou-o através de um exemplo simples;
2. Numa segunda fase, o investigador matemático mediou momentos de discussão e reflexão de modo que a programação desses modelos matemáticos para implementação computacional, bem como a sua interpretação no

contexto desportivo fossem as mais corretas e adequadas à resolução da situação problemática definida.

Em seguida descreve-se o modo como o investigador matemático preparava as duas fases acima mencionadas.

Previamente às sessões de trabalho conjunto preparava uma forma adequada ao contexto de desportos coletivos com o objetivo de proporcionar a apresentação, exemplificação e interpretação de conceitos fundamentais e modelos matemáticos relacionados com a teoria de grafos aos restantes elementos do grupo. Normalmente, o desporto coletivo mais usado como exemplo foi o futebol.

Além disso, também se pretendia que essa forma ajudasse à compreensão desses conceitos e modelos matemáticos por parte dos outros elementos do grupo de modo a otimizar a sua implementação e facilitar a sua interpretação no contexto das situações problemáticas.

Esta forma contemplava situações problemáticas reais no âmbito do contexto de desportos coletivos em que a sua resolução passava pela análise dos nós de uma rede, representando estes a posição tática ou um jogador, bem como a análise da própria rede. Sempre que possível, fazia-se diversas representações para ajudar à compreensão das situações problemáticas apresentadas.

Após esta compreensão, apresentava e interpretava-se o modelo matemático mais adequado às situações problemáticas. Para ser mais fácil a compreensão do modelo matemático apresentado, o investigador matemático começava por considerar uma situação particular considerando apenas 3 ou 4 nós.

Deste modo ao representar-se o modelo matemático para essa situação particular potenciava-se a compreensão de como estava a ser feita a análise do nó e da rede. Este tipo de situações proporcionava aos outros elementos do grupo a compreensão da aplicação desses modelos matemáticos em outras situações independentemente do número de nós e do desporto coletivo.

Para a preparação dessas sessões de trabalho o investigador matemático considerou referências bibliográficas fundamentais e adequadas como ponto de partida ao aprofundamento dos conhecimentos relacionados com a teoria de grafos aplicada ao

contexto de desportos coletivos (Clemente, Couceiro, et al., 2015; Clemente, Martins, et al., 2015; Clemente, Silva, et al., 2016;; Couceiro et al., 2013; Freeman, 1977; Horvath, 2011; Opsahl et al., 2010; Pavlopoulos et al., 2011; Piraveenan et al., 2012 ; Rubinov & Sporns, 2010; Wasserman & Faust, 1994).

Em seguida, é dado cumprimento ao terceiro princípio da *DBR*, através da implementação do protótipo *uPATO*. Neste sentido foram efetuados dois ciclos de implementação.

O primeiro ciclo de implementação foi efetuado pelos membros do grupo de investigação e um conjunto de especialistas na área de desportos coletivos do Laboratório ROBOCORP do IIA – IPC e da UNICID da ESE – IPC. Além disso, o protótipo foi apresentado na *International Conference on Engineering, Technology and Innovation* (Silva et al., 2017).

Surgiram algumas críticas e sugestões relativamente à usabilidade do protótipo.

Considerando as críticas e sugestões procedemos a um *redesign*, após a avaliação deste primeiro ciclo de implementação, tendo-se decidido a partir deste protótipo desenvolver uma ferramenta *web*³ e outra *móvel*⁴ (apenas para Android).

Em seguida descreve-se o papel do investigador matemático no primeiro ciclo de implementação.

O investigador matemático participou ativamente nos testes de usabilidade em que procedeu à utilização do protótipo a partir de situações reais. Para além disso, acompanhou o processo de validação dos resultados produzidos pelos modelos matemáticos implementados no protótipo. Este processo consistiu na utilização de redes cujo valor obtido através de modelos matemáticos já se conhecia de modo a poder estabelecer-se possíveis comparações com os resultados obtidos no protótipo. Assim, foi possível detetar e colmatar pequenas lacunas na implementação efetuada.

O segundo ciclo de implementação foi efetuado tendo por objetivo fazer testes de usabilidade e validade às duas ferramentas *uPATO* desenvolvidas, uma para *web* e

³ <https://upato.it.ubi.pt/>

⁴ <https://play.google.com/store/apps/details?id=pt.ubi.di.upato>

outra móvel apenas para dispositivos *Android*. Assim, foram dinamizadas sessões práticas com estudantes e professores da área de Ciências do Desporto:

1. Duas sessões na ESE-IPC tendo estas também incluído um treinador de Futebol e um ex-treinador da seleção nacional de Rugby;
2. Uma sessão na Faculdade de Educação da Universidade de Castilla - La Mancha, Cuenca (Espanha);
3. Uma sessão na Faculdade de Ciências de Desporto (FCD) da Universidade de Granada, Granada (Espanha).

A dinamização das sessões práticas teve duas partes:

1. A primeira parte (Figura 5) consistia numa breve explicação acerca do que é o projeto *uPATO* e a que questões se pretendia responder com o seu desenvolvimento. Depois efetuava-se uma contextualização da linguagem dos desportos coletivos na teoria de grafos e vice-versa, no caso de se considerar a análise das equipas com base em redes. Por outro lado, também se efetuava a contextualização da análise de desportos coletivos tendo por base a georreferenciação dos jogadores de uma equipa. Embora os dados georreferenciados, não façam parte das tarefas da situação apresentada neste ensaio, deve-se referir que ambas as ferramentas *uPATO* (*web* e móvel) são constituídas por dois módulos: um para dados provenientes de redes; e outro para dados recolhidos com base em dispositivos de georreferenciação.

De seguida fazia-se uma incursão pela ferramenta para exemplificar a usabilidade da mesma, sempre com a preocupação de adequar a linguagem ao contexto do desporto.



Figura 5. Dinamização da primeira parte das sessões de testes e validação.

2. Na segunda parte (Figura 6), os participantes tinham de recolher dados a partir de situações reais do desporto, tanto a partir do visionamento de um vídeo como num campo de jogos, usando a ferramenta *uPATO* (criação de redes) e/ou dispositivos de georreferenciação (e.g. GPS FieldWiz).

Posteriormente, esses participantes, com a mediação dos dinamizadores da sessão prática, analisavam esses dados com a ferramenta *uPATO*, fazendo as respetivas representações, uso de diversos modelos matemáticos e, por fim, uma interpretação a partir da análise efetuada no respetivo contexto da situação problemática que deu origem à recolha de dados.



Figura 6. Dinamização da segunda parte das sessões de testes e validação.

Após estas ações de testes e validação procedeu-se a alguns ajustes que decorreram das mesmas. Na Figura 7 apresenta-se uma representação da ferramenta *uPATO* sendo idêntica para a aplicação *web* e *móvel*.

Em seguida descreve-se o papel do investigador matemático no segundo ciclo de implementação.

O papel do investigador matemático nestas sessões práticas de testes e validação foi, essencialmente, na contextualização da linguagem de desportos coletivos na teoria de grafos e depois na ajuda à interpretação dos valores calculados através de modelos matemáticos no contexto do desporto associado à situação escolhida pelos participantes. E, também, na contextualização da análise de desportos coletivos tendo por base a georreferenciação dos jogadores de uma equipa.

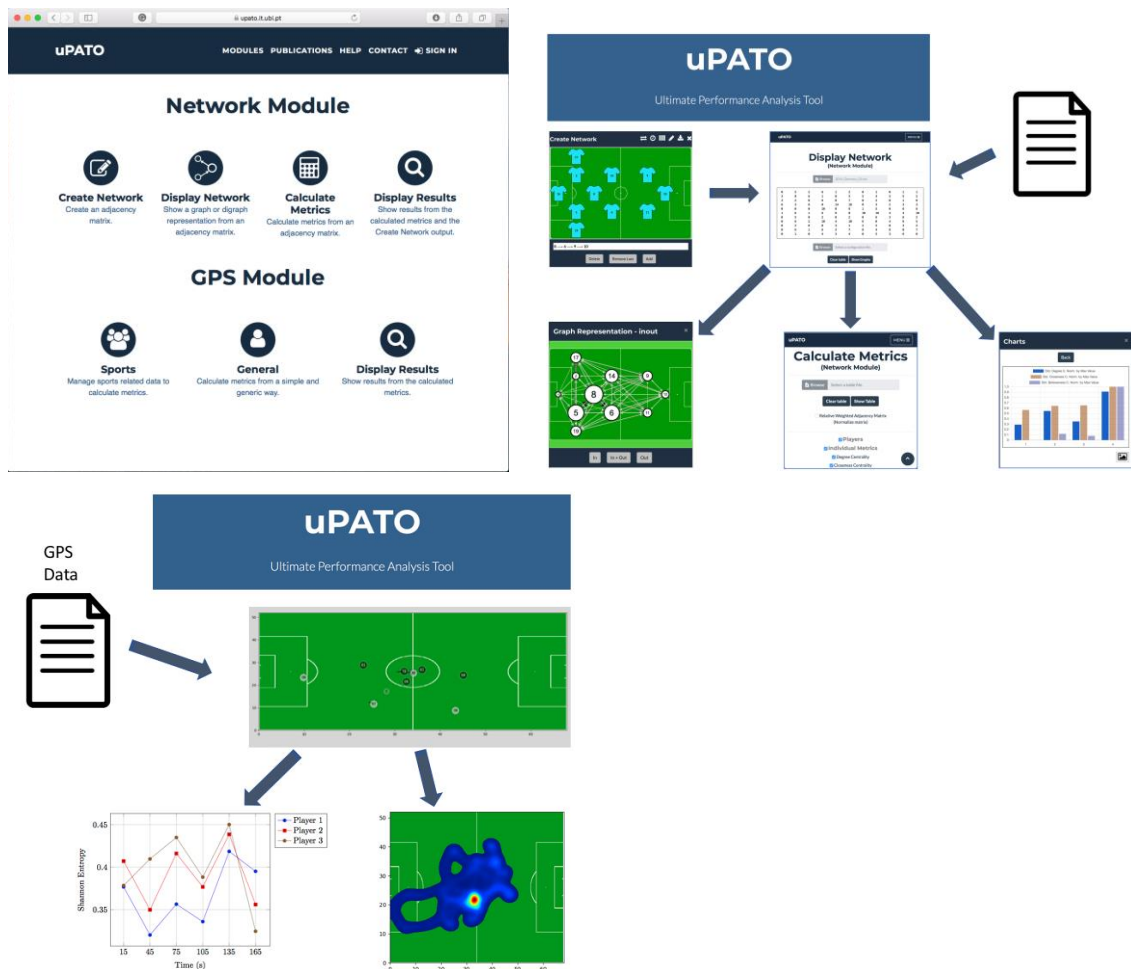


Figura 7. Representação das funcionalidades da ferramenta *uPATO*.

Considerando o quarto princípio da *DBR*, reflexão e avaliação, constatou-se que as soluções encontradas responderam ao problema de investigação definido inicialmente e nesse sentido foram efetuadas duas publicações que refletem todos os avanços do desenvolvimento tanto da ferramenta web como móvel (Clemente et al., 2018; Silva, Lopes, et al., 2019; Silva, Nguyen, et al., 2019).

No âmbito de continuar a promover a usabilidade da ferramenta *uPATO* (*web* e móvel) foram dinamizadas mais sessões práticas com estudantes e professores da área de Ciências do Desporto, tanto na ESE-IPC como na FCD da Universidade de Granada (Espanha). Para além disso foram efetuadas duas comunicações em congressos.

Neste sentido, após a construção da ferramenta *uPATO* respondendo ao problema de investigação, todas as sessões em que a mesma seja utilizada continuarão a potenciar o aparecimento de sugestões para a tornar ainda melhor em termos de usabilidade.

5. Didática da Matemática na investigação em grupos multidisciplinares

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) desenvolvida por Guy Brousseau, a partir de 1960, constituiu “uma perspectiva sistémica, concebendo a didática da matemática como o estudo das condições para a disseminação e apropriação do conhecimento matemático por meio de situações” (Artigue et al., 2014, p. 48). A TSD contempla fundamentalmente as situações didáticas, ou seja, aquelas que são desenhadas e utilizadas com objetivos de ensino e de aprendizagem (Artigue et al., 2014).

No entanto para que essas situações didáticas possam ser planeadas e implementadas é preciso transformar o “conhecimento académico” em “conhecimento para ensinar” e este depois em “conhecimento ensinado” (Figura 8). Estas transformações estão inseridas no processo que é denominado Transposição Didática (TD) e “refere-se às transformações pelas quais um objeto ou um corpo de conhecimentos passa desde o momento em que é produzido, colocado em uso, selecionado e projetado para ser ensinado até ser efetivamente ensinado numa determinada instituição educacional” (Chevallard & Bosch, 2020, p. 214).

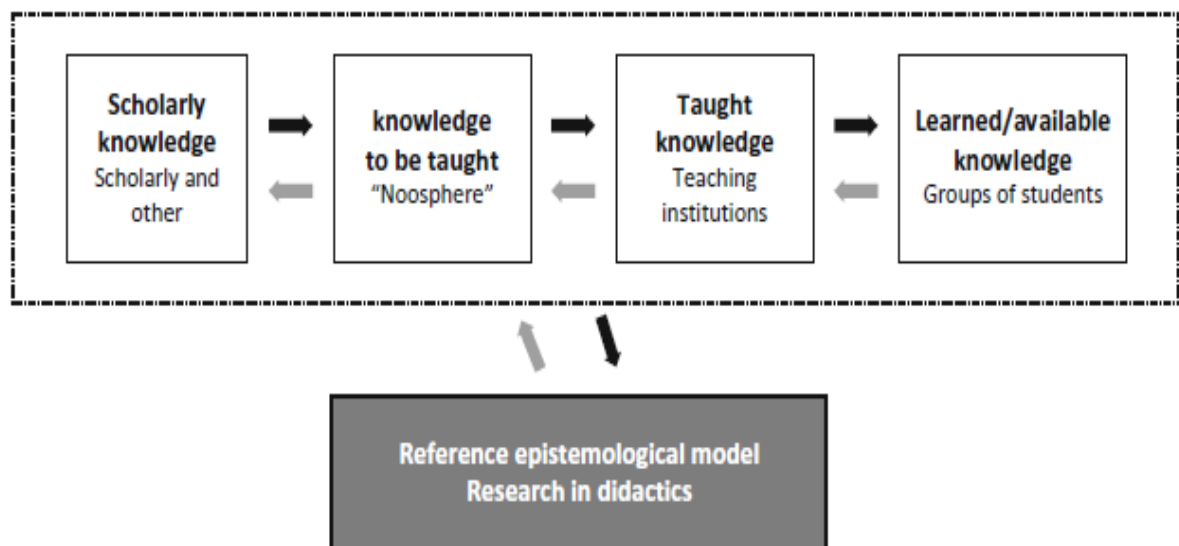


Figura 8. Diagrama do processo de Transposição Didáctica incluindo a posição externa de investigadores (Chevallard & Bosch, 2020, p. 217).

Deste modo, esses tipos de conhecimentos envolvidos na TD são definidos da seguinte forma (Bosch & Gascón, 2006, 2014; Chevallard & Bosch, 2020):

1. Conhecimento acadêmico: conhecimento produzido por matemáticos ou outros cientistas que são reconhecidos como “especialistas no conteúdo” e aparece como uma fonte de legitimação do conhecimento a ser ensinado. Geralmente produzido em universidades e outras instituições acadêmicas, integrando também elementos retirados de uma variedade de práticas sociais relacionadas;
2. Conhecimento para ensinar: conhecimento que se pode ter acesso por meio de programas oficiais, livros didáticos, recomendações para professores, materiais didáticos, entre outros, que podem ajudar a considerar também as condições sob as quais ele é constituído e evolui (ou permanece fixo) no tempo;
3. Conhecimento ensinado: conhecimento matemático, efetivamente, ensinado pelos professores nas salas de aula;
4. Conhecimento aprendido: conhecimento matemático, efetivamente, aprendido pelos alunos nas salas de aula.

Acrescenta-se ainda que “o conhecimento acadêmico não deve ser considerado como a única referência para todas as praxeologias da matemática escolar. Para evitar a adoção de um ponto de vista particular e “tendencioso”, os investigadores em didática precisam de elaborar os seus próprios “modelos de referência” [Figura 8] para considerar os dados empíricos das três instituições correspondentes: a comunidade matemática, “nooesfera” e “salas de aula” (Bosch & Gascón, 2014, p. 71). Neste sentido a “TSD é considerada neste processo como a “máquina” de construir modelos epistemológicos de referência” (Bosch & Gascón, 2006, p. 58).

Artigue et al. (2014) consideram que “a perspectiva sistémica e a ambição da TSD de desenvolver a didática como um verdadeiro campo de investigação fundamental e aplicado também moldaram o desenvolvimento metodológico da teoria” (p. 50).

A Engenharia Didática (ED) surge como uma metodologia para implementar a TSD e desta forma dar acesso à complexidade dos sistemas didáticos (Artigue et al., 2014; Artigue, 2018). Desde 1990, a ED começou a ser usada nas sessões de preparação de professores e desenvolvimento profissional, por didatas de outras disciplinas, por exemplo, Ciências Físicas ou Desporto e, também, por investigadores em Educação Matemática em diferentes países (Artigue, 2018).

A ED pode ser considerada como uma metodologia de investigação do tipo *Design-Based Research* e é estruturada em quatro fases diferentes (Artigue, 2018; Barquero, & Bosch, 2015):

1. Análises preliminares: nesta primeira fase incluem-se três dimensões principais – uma análise epistemológica do conteúdo matemático envolvido, uma análise das condições e constrangimentos institucionais que a ED enfrentará e uma análise do que existe na investigação educacional para apoiar o *design*;
2. *Design* e análise *a priori*: nesta fase, *design* e análise *a priori*, as hipóteses de investigação são envolvidas no processo. O *design* requer várias opções, do global ao local. Essas opções determinam as variáveis didáticas que condicionam as interações entre os alunos e o conhecimento, entre os alunos e entre alunos e professores, assim como as oportunidades que os alunos têm para aprender. A análise *a priori* ajuda à compreensão dessas opções enquadradas com as hipóteses de investigação. São feitas conjeturas sobre a possível dinâmica da situação, a interação dos alunos com o meio, as estratégias dos alunos, a sua evolução e os seus resultados, sobre a contribuição e o papel necessários do professor; a implementação envolverá os alunos com as suas especificidades pessoais e história, mas o objetivo da análise *a priori* não é antever todo esse comportamento pessoal, mas construir uma referência com a qual as implementações em sala de aula serão comparadas na análise *a posteriori*.
3. Implementação, observação e recolha de dados: durante a fase de implementação, os dados são recolhidos para a análise *a posteriori*. A natureza desses dados depende dos objetivos necessários da ED, das hipóteses testadas e das conjeturas feitas na análise *a priori*. A implementação pode levar a alguma adaptação do *design*, principalmente quando a ED é de dimensão substancial.

Essas adaptações são documentadas e levadas em consideração na análise *a posteriori*;

4. Análise *a posteriori* e validação: nesta fase, uma análise *a posteriori* é organizada em termos de comparação com a análise *a priori*. Até que ponto os dados recolhidos durante a implementação suportam a análise *a priori*? Quais são as convergências e divergências significativas e como interpretá-las? As hipóteses subjacentes ao design são postas à prova nesta comparação. A validação das hipóteses subjacentes ao *design* não impõe, portanto, uma combinação perfeita entre as duas análises. Além disso, a validação das hipóteses de investigação pode exigir a recolha de dados complementares aos recolhidos durante a aula, principalmente para a reflexão sobre os resultados de aprendizagem no processo.

Neste sentido pode-se referir que existe uma similaridade entre as fases da ED e as fases da DBR descritas em 4.4.3.

Acrescenta-se que na metodologia ED se for considerado a evolução da colaboração entre professores e investigadores ao longo dos ciclos de implementação estamos perante a Engenharia Didática de segunda geração, designada engenharia didática para o desenvolvimento (EDD) (Artigue, 2018; Tempier, 2016). Assim, a EDD é uma metodologia que consiste em ciclos de conceção de um recurso e implementação com professores, efetuando uma comparação das análises *a priori* e *a posteriori*. Assim, importa referir que a engenharia didática para o desenvolvimento pode ser considerada uma metodologia *Design-Based Research Collective* (Tempier, 2016).

5.1. Transposição Didática e o investigador matemático

Em seguida analisa-se o papel do investigador matemático descrito nas quatro situações de investigação, apresentadas nas secções 3 e 4, com base nos tipos de conhecimento envolvidos no processo de Transposição Didática (TD).

Nas quatro situações, o investigador matemático inicialmente teve a tarefa de compreender as situações problemáticas e identificar os métodos matemáticos e/ou estatísticos que podem contribuir para a resolução da mesma. Para além disso, teve de identificar as condições de aplicabilidade desses métodos, as regras para serem usados e a forma como determinar os valores desses métodos. Estes aspetos identificados são inseparáveis na atividade matemática e podem ser considerados como o conhecimento prático (ou bloco prático ou *know-how*) formado por tipos de problemas ou tarefas problemáticas e as técnicas para a sua resolução (Barbé et al., 2005; Bosch & Gascón, 2014).

A abordagem antropológica da didática assume dois pressupostos (Barbé et al., 2005, p. 237; Bosch & Gascón, 2014, p. 68):

1. O primeiro pressuposto postula que “qualquer forma de trabalhar, a realização de qualquer tarefa ou a resolução de qualquer problema exijam a existência de uma técnica, mesmo que essa técnica possa ser difícil descrever ou mostrar aos outros (até a nós mesmos)”;
2. O segundo pressuposto da abordagem antropológica refere que “as práticas humanas raramente existem sem um ambiente discursivo, cujo objetivo é descrever, explicar e justificar o que é feito” (Barbé et al., 2005; Bosch & Gascón, 2014). O discurso matemático que é necessário para justificar e interpretar o conhecimento prático, estrutura-se em dois níveis: 1) a tecnologia que se refere diretamente à técnica utilizada; e 2) a teoria que constitui um nível mais profundo de justificação da prática (Barbé et al., 2005).

Assim, os elementos básicos do modelo antropológico de atividade matemática – tipos de problemas, técnicas, tecnologias e teorias –, formam a praxeologia matemática (Barbé et al., 2005; Bosch & Gascón, 2014). Deste modo a praxeologia matemática constitui um modelo epistemológico de conhecimento académico.

Considerando o que foi referido pode-se dizer que, num primeiro momento, as tarefas iniciais do investigador matemático descritas nas três situações de investigação permitiram-lhe constituir o conhecimento académico para cada uma dessas situações. Este conhecimento académico de forma muito sucinta encontra-se mencionado nas

várias publicações efetuadas pelos diversos grupos multidisciplinares de que o investigador matemático fez parte.

Num segundo momento, na descrição do papel do investigador matemático podemos encontrar referência à forma da preparação das sessões de trabalho em que participou. Essa preparação teve como objetivo constituir o conhecimento para ensinar, a partir do conhecimento académico, bem como procurou mais conhecimentos que permitiram pensar sobre o seu “ensino” nas sessões de trabalho com os restantes elementos dos grupos multidisciplinares GMd1, GMd2, GMd3 e GMd4.

Posteriormente, num terceiro momento, considerando as diversas descrições das situações de investigação, possibilitaram ao investigador matemático constituir o conhecimento ensinado tendo em conta a forma como dinamizou as sessões de trabalho.

A constituição do conhecimento aprendido, num quarto e último momento do processo de TD, está relacionada com a apropriação dos conceitos envolvidos na resolução das situações problemáticas por parte dos outros membros dos diversos grupos multidisciplinares. O investigador matemático teve como objetivo que esta apropriação potenciase as interpretações dos resultados no contexto das situações problemáticas, e deste modo contribuir para as exigências na apresentação e discussão dos resultados nas publicações efetuadas.

A apropriação de conhecimentos por parte dos outros membros do grupo multidisciplinar pode também ser relacionada com a indexação das publicações. Só estudos robustos com uma relevante pertinência são publicados em revistas e periódicos científicos com indexação e fator de impacto, e isso só acontece quando existe uma articulação entre a problemática e os métodos usados para a resolver num determinado contexto. Essa articulação só se torna determinante se os conhecimentos forem transformados, desconstruídos e reconstruídos para se adaptarem ao novo ambiente “institucional”.

Deste modo é fulcral que seja considerada a noção de TD de Chevallard e Bosch (2020) no papel que o investigador matemático tem nos grupos multidisciplinares, tal como foi objetivo apresentar com as quatro situações de investigação descritas neste ensaio.

Em síntese, através das quatro situações de investigação descritas nas secções 3 e 4 deste ensaio, podemos referir que o investigador matemático teve como objetivo efetuar a TD. Neste sentido, na descrição das situações de investigação para que o investigador matemático pudesse preparar situações didáticas adequadas aos grupos multidisciplinares a que pertenceu foi necessário transformar o conhecimento académico em conhecimento ensinado.

Deste modo as diversas situações didáticas que o investigador matemático preparou nas quatro situações de investigação permitiram que os outros membros nos quatro grupos multidisciplinares se apropriassem dos conceitos matemáticos envolvidos potenciando a resolução dos problemas de investigação.

5.2. Engenharia Didática e o investigador matemático

A Engenharia Didática (ED) pode ser considerada como metodologia para implementar conhecimento matemático nas salas de aula (Bosch & Gascón, 2006, p. 58), bem como metodologia de investigação do tipo *DBR* (Artigue, 2018).

A descrição da quarta situação de investigação (secção 4.4) segundo uma metodologia do tipo *DBR* cujo objetivo foi o desenvolvimento da ferramenta *uPATO* permite-nos efetuar uma aproximação às fases que estruturam a ED. Tal como se pode ver ao longo do desenvolvimento da ferramenta *uPATO*, esta pode ser considerada uma ferramenta epistémica para alunos, nomeadamente de cursos no âmbito das Ciências do Desporto.

Acrescenta-se que de forma similar aos trabalhos no âmbito do Mestrado em Jogo e Motricidade da Infância e efetuados com crianças do 1.º CEB (Ferreira, 2017; Santos, 2017; Silva, 2017), esta ferramenta também poderá ser usada em cursos de Licenciatura em Educação Básica e Mestrados da Formação de Educadores e Professores, pois permite a representação de alguns conceitos de matemática elementar, nomeadamente de álgebra e de organização e tratamento de dados.

Assim, assume-se que a participação do investigador matemático no projeto *uPATO*, como investigador responsável, é um exemplo ilustrativo de aplicação dos princípios da ED.

O investigador matemático implementou um Modelo de Sessão de Trabalho em Grupo Multidisciplinar (MSTGM), de forma informal, nos grupos de investigação multidisciplinar apresentados neste ensaio. A conceção e designação formal deste modelo decorre da finalidade deste ensaio, sendo este fundamentado com base nos princípios da ED.

Neste sentido, apresentam-se, a seguir, os elementos do Modelo de Sessão de Trabalho em Grupo Multidisciplinar (MSTGM):

1. “Conhecimento para ensinar” – sugere-se que o investigador matemático após ter constituído o conhecimento académico envolvido nas situações problemáticas em investigação: (i) efetue uma pesquisa sobre estudos que apliquem os tópicos matemáticos identificados ao contexto do problema de investigação; (ii) procure estratégias e propostas de uso ou integração de tecnologia nos processos de ensino e de aprendizagem relacionados com os tópicos matemáticos identificados. Desta forma, existem condições mais propícias para poder fazer-se uma antevisão e implementar estratégias de superação de prováveis obstáculos nas aprendizagens dos outros investigadores;
2. Transparência do processo – sugere-se que o investigador esclareça, logo no início: (i) os objetivos das sessões e o modo como irão decorrer; (ii) o que se espera dos outros investigadores (envolvimento nas tarefas, colaboração entre os colegas do grupo e participação nas discussões); (iii) a atuação do próprio. Com isto, pretende-se que os todos os investigadores sejam parte integrante de um processo que assenta numa responsabilização coletiva da construção do conhecimento;
3. Aprendizagem colaborativa – deverá ser desenhado um ambiente de aprendizagem de acordo com os princípios de aprendizagem colaborativa, criando condições para aumentar a possibilidade de serem fomentadas interações que potenciem o surgimento de aprendizagens significativas e duradouras. Para tal, propõe-se que se sigam as seguintes orientações:

-
- 3.1. *O investigador matemático* – deverá desempenhar o papel de mediador na resolução das situações problemáticas e discussões, acompanhando de perto os outros investigadores, abrindo espaço para que esses se possam assumir como construtores do seu conhecimento em contexto; e deste modo permitir aos outros investigadores um reforço das suas competências matemáticas;
 - 3.2. *Os outros investigadores* – deverão ser ativos na construção do conhecimento em contexto; ser participativos, tendo opinião crítica; e ser solucionadores de problemas em contexto;
 - 3.3. *As tarefas* – o seu desenho e adaptação deverá garantir que existirá uma apropriação dos tópicos matemáticos por parte dos outros investigadores de forma a contribuir para o incremento dos seus conhecimentos num determinado contexto;
 - 3.4. *A tecnologia* – tal como é sugerido pelo quadro conceptual *TPACK* (Mishra & Koehler, 2006), a escolha da tecnologia a usar deverá ser orientada: pelas suas características, potencialidades e restrições; pela sua adequação ao contexto; pela adequação ao conteúdo e potencialidade para promover aprendizagens significativas e duradouras quando integradas num ambiente de aprendizagem colaborativo.
 - 3.5. *A discussão* – deverá ser construtiva e objetiva; deve ser mediada pelo investigador matemático de maneira que o debate de ideias dissonantes permita: (i) aprofundar a compreensão de conceitos; (ii) potenciar aprendizagens; e (iii) incrementar a capacidade de articulação entre a problemática em estudo e os métodos usados para a resolver num determinado contexto;
 4. *O espaço* – o local deverá ter condições técnicas que permitam a projeção do ecrã do computador usado durante as sessões, bem como ter outros computadores com softwares instalados, nomeadamente *Matlab* e *IBM-SPSS*. Esses computadores também deverão ter acesso à internet, nomeadamente para aceder à ferramenta *uPATO*;

-
5. A gravação das sessões – este registo permite que os outros investigadores possam ficar com uma cópia para poderem refletir sobre o que foi feito (resolução e discussão das situações problemáticas). No caso de serem usadas ferramentas tecnológicas, essas gravações das sessões deverão permitir não só a captação do áudio, mas também do ecrã resultante da manipulação dessas ferramentas. Para tal deverá ser usado um software de *screen recording*. Essas gravações também servirão para a reflexão sobre o MSTGM, possibilitando um aperfeiçoamento contínuo.

Acrescenta-se que a proposta da gravação das sessões foi recentemente introduzida tendo a ideia nascido na reflexão da última sessão prática com a ferramenta *uPATO*. No MSTGM é determinante para a sua implementação o processo TD.

Em síntese, da análise das quatro situações de investigação descritas nas secções 3 e 4 deste ensaio constata-se que o investigador matemático fez uso dos princípios da ED e aplicou a TSD. Neste sentido, na descrição das situações de investigação para que o investigador matemático pudesse implementar as fases da metodologia ED, aplicando a TSD, leva-o a conceber o *design* do MSTGM.

6. Conclusões

Considerando o que foi mencionado nas secções 5.1 e 5.2, o investigador matemático na sua atuação efetuou a TD e desenvolveu a TSD nos grupos de investigação multidisciplinar, GMd1, GMd2, GMd3 e GMd4, a que pertenceu. Com base na análise dessa atuação, concebeu-se o modelo MSTGM.

O investigador matemático ao atuar de acordo com o MSTGM criou condições para a disseminação e apropriação do conhecimento matemático por meio de situações de investigação. Assim pode-se admitir que o investigador matemático teve um papel como didata.

A didática da matemática foi nuclear na resolução dos diversos problemas de investigação, bem como o papel do investigador matemático como didata, nas diversas situações apresentadas.

Neste sentido, perspetivamos duas condições para o papel do investigador matemático, que terá de ser um didata, na investigação multidisciplinar, a saber:

1. Efetuar a Transposição Didática de forma adequada aos contextos reais das situações problemáticas;
2. Usar um modelo de sessão de trabalho que seja concebido através da Engenharia Didática para promover a Teoria das Situações Didáticas, podendo o MSTGM constituir-se como ponto de partida.

Para concluir este ensaio, a perspetiva da forma como um investigador matemático pode trabalhar na investigação multidisciplinar, apresentada anteriormente, promove o desenvolvimento e o aprofundamento do seu conhecimento profissional ao nível da promoção de aprendizagens em contexto. Além disso, também, adquire competências fulcrais para a promoção de práticas que promovam a interdisciplinaridade, autorregulação e correção de aprendizagens, aprendizagens colaborativas e modelação matemática como ambiente de aprendizagem.

Referências bibliográficas

- Aderibigbe, A., Stewart, A., & Hursthouse, A. (2018). Seeking evidence of multidisciplinary in environmental geochemistry and health: An analysis of arsenic in drinking water research. *Environmental geochemistry and health*, 40(1), 395-413.
- Altman, D. G., Goodman, S. N., & Schroter, S. (2002). How statistical expertise is used in medical research. *Jama*, 287(21), 2817-2820.
- Arias-Palencia, N., Solera-Martínez, M., Gracia-Marco, L., Silva, P., Martínez-Vizcaíno, V., Cañete-García-Prieto, J., Sánchez-López, M. (2015). Levels and Patterns of Objectively Assessed Physical Activity and Compliance with Different Public Health Guidelines in University Students. *PLoS ONE* 10(11): e0141977. Doi: 10.1371/journal.pone.0141977.
- Artigue, M., Haspekian, M., & Corblin-Lenfant, A. (2014). Introduction to the theory of didactical situations (TDS). In Bikner-Ahsbahs A., Prediger S. (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 47-65). Switzerland: Springer.
- Artigue, M. (2018). Didactic Engineering in Mathematics Education. In: Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_44-5
- Barnett, S. (1983). *Polynomials and linear control systems*. New York: Marcel Dekker.
- Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascón, J. (2005). Didactic Restrictions on the Teacher's Practice: The Case of Limits of Functions in Spanish High Schools. . In Laborde C., Perrin-Glorian M. J., Sierpiska A. (Eds.), *Beyond the Apparent Banality of the Mathematics Classroom* (pp. 235-268). Boston: Springer. Doi: https://doi.org/10.1007/0-387-30451-7_9
- Barquero, B., & Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. In *Task design in mathematics education* (pp. 249-272). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_8
- Blum, W., Artigue, M., Mariotti, M., Sträßer, R., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Eds.) (2019). *European Traditions in Didactics of Mathematics*. Cham: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-05514-1>
- Bonabeau, E., Dorigo, M., & Theraulaz, G. (1999). *Swarm Intelligence: From Natural to Artificial Systems*. New York: Oxford University Press.
- Bosch, M., & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI bulletin*, 58, 51-65.
- Bosch, M., & Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbahs, S. Prediger (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 67-83). Cham: Springer.
- Ceballos, H., Garza, S., & Cantu, F. (2018). Factors influencing the formation of intra-institutional formal research groups: group prediction from collaboration, organisational, and topical networks. *Scientometrics*, 114(1), 181-216. <https://doi.org/10.1007/s11192-017-2561-1>
- Chen, Y., Wu, S., Tang, Z., Zhang, J., Wang, L., Yu, L., Wang, K., & Svensson, P. (2019). Effects of Motor Training on Accuracy and Precision of Jaw and Finger Movements. *Neural Plasticity*, 2019. <https://doi.org/10.1155/2019/9593464>

-
- Chevallard, Y., & Bosch, M. (2020). Didactic Transposition in Mathematics Education. In Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_48
- Clemente, F., Couceiro, M., Martins, F., & Mendes, R. (2015). Using network metrics in soccer: a macro-analysis. *Journal of human kinetics*, 45(1), 123-134.
- Clemente, F., Martins, F., & Mendes, R. (2016). *Social network analysis applied to team sports analysis*. Netherlands: Springer International Publishing.
- Clemente, F., Martins, F., Wong, P., Kalamaras, D., & Mendes, R. (2015). Midfielder as the prominent participant in the building attack: A network analysis of national teams in FIFA World Cup 2014. *International Journal of Performance Analysis in Sport*, 15(2), 704-722.
- Clemente, F., Nikolaidis, P., Martins, F., & Mendes, R. (2016a). Physical activity patterns in university students: Do they follow the public health guidelines? *PLoS One*, 11(3), e0152516. Doi: 10.1371/journal.pone.0152516
- Clemente, F., Nikolaidis, P., Martins, F., & Mendes, R. (2016b). Weekly physical activity patterns of university students: Are athletes more active than non-athletes? *SpringerPlus*, 5(1), 1808. Doi: 10.1186/s40064-016-3508-3.
- Clemente, F., Sequeiros, J., Correia, A., Silva, F., & Martins, F. (2018). *Computational Metrics and Its Applications on the Analysis of Soccer: Connecting the dots*. Singapore: Springer International Publishing.
- Clemente, F., Silva, F., Martins, F., Kalamaras, D., & Mendes, R. (2016). Performance Analysis Tool for network analysis on team sports: A case study of FIFA Soccer World Cup 2014. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part P: Journal of Sports Engineering and Technology*, 230(3), 158-170.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education*. New York: Routledge.
- Couceiro, M., Martins, F., Clemente, F., Dias, G., & Mendes, R. (2014). On a fuzzy approach for the evaluation of golf players. *Maejo International Journal of Science and Technology*, 8(1), 86-99. Doi: 10.14456/mijst.2014.8
- Couceiro, M., Clemente, F., & Martins, F. (2013). Toward the Evaluation of Research Groups based on Scientific Co-authorship Networks: the Robocorp Case Study. *Arab Gulf Journal of Scientific Research*, 31(1), 36-52.
- Couceiro, M., Martins, F., Rocha, R., & Ferreira, N. (2014). Mechanism and convergence analysis of a multi-robot swarm approach based on natural selection. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 76(2), 353-381. <https://doi.org/10.1007/s10846-014-0030-0>.
- Couceiro, M., Martins, F., Rocha, R., & Ferreira, N. (2012a). Introducing the Fractional Order Robotic Darwinian PSO. *Proceedings of the 9th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences (ICNPAA2012)*, 1943 (1), 242-251. <https://doi.org/10.1063/1.4765496>
- Couceiro, M., Martins, F., Rocha, R., & Ferreira, N. (2012b). Analysis and Parameter Adjustment of the RDPSO Towards an Understanding of Robotic Network Dynamic Partitioning based on Darwin's Theory. *International Mathematical Forum*, 7 (32), 1587-1601.
- Creswell, J. W. (2014). *Research design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. London: Sage publications.
-

-
- Daou, M., Rhoads, J., Jacobs, T., Lohse, K., & Miller, M. (2019). Does limiting pre-movement time during practice eliminate the benefit of practicing while expecting to teach?. *Human Movement Science*, 64, 153-163. <https://doi.org/10.1016/j.humov.2018.11.017>
- Dias, G., Martins, F., Couceiro, M., Clemente, F., & Mendes, R. (2014). A non-linear understanding of golf putting. *South African Journal for Research in Sport, Physical Education and Recreation*, 36(1), 29-47.
- Diniz, A., Barreiros, J., Benda, R., & Crato, N. (2007). Modelling learning curves: A segmented-trend Method. *Proceedings of the International Symposium on Measurement, Analysis and Modeling* (pp. 319-324). Lisboa: Edições FMH
- Dinger, M. K., & Behrens, T. K. (2006). Accelerometer-determined physical activity of free-living college students. *Medicine and science in sports and exercise*, 38(4), 774-779.
- Drews, R., Chiviawsky, S., & Wulf, G. (2013). Children's motor skill learning is influenced by their conceptions of ability. *Journal of Motor Learning and Development*, 1(2), 38-44. <https://doi.org/10.1123/jmld.1.2.38>
- Ferreira, O. (2017). *Efeitos de jogos lúdico-recreativos de cooperação ao nível da atividade física e interações em crianças no 1.º Ciclo do Ensino Básico*. (Dissertação de Mestrado, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra).
- Freeman, L. (1977). A set of measures of centrality based on betweenness. *Sociometry*, 40, 35-41.
- Gee, B., Devine, N., Aubuchon-Endsley, N., Brumley, M., Ramsdell-Hudock, H., & Swann, H. (2017). The Reciprocity Team: Development of an Interprofessional Research Collaboration. *Journal of allied health*, 46(2), 43E-49E.
- Governo de Portugal [GP] (2014). *Portugal 2020: Acordo de Parceria 2014-2020*. Lisboa: Governo de Portugal. Disponível em https://www.portugal2020.pt/sites/default/files/1._ap_portugal_2020_28julho_0.pdf, acedido a 2 de setembro de 2019.
- Guo, C., & Raymond, J. (2010). Motor learning reduces eye movement variability through reweighting of sensory inputs. *Journal of Neuroscience*, 30(48), 16241-16248. <https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.3569-10.2010>
- Horvath, S. (2011). *Weighted network analysis: Applications in genomics and systems biology*. New York: Springer.
- Instituto Português da Qualidade [IPQ] (2008). *Vocabulário Internacional de Metrologia – Guia ISO/IEC 99*. Lisboa: IPQ.
- Jolliffe, I. (2002). *Principal Component Analysis*. New York: Wiley Online Library.
- Korte, F., & Lames, M. (2019). Passing network analysis of positional attack formations in handball. *Journal of Human Kinetics*, 70(1), 209-221.
- Kumar, A., Tanaka, Y., Grigoriadis, A., Grigoriadis, J., Trulsson, M., & Svensson, P. (2017). Training-induced dynamics of accuracy and precision in human motor control. *Scientific Reports*, 7(1), 1-10. www.nature.com/articles/s41598-017-07078-y
- Laporta, L., Afonso, J., Valongo, B., & Mesquita, I. (2019). Using social network analysis to assess play efficacy according to game patterns: a game-centred approach in high-level men's volleyball. *International Journal of Performance Analysis in Sport*, 19(5), 866-877.

-
- Laureano, R. (2011). *Testes de hipótese com o SPSS: o meu manual de consulta rápida*. Lisboa: Edições Sílabo.
- Lima, T. (2014). *Lições de álgebra linear*. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra. <http://dx.doi.org/10.14195/978-989-26-0855-6>
- Lustig, L., Ponzielli, R., Tang, P., Sathiamoorthy, S., Inamoto, I., Shin, J., Penn, L., & Chan, W. (2015). Guiding principles for a successful multidisciplinary research collaboration. *Future science OA*, 1(3). <https://doi.org/10.4155/fso.15.1>
- Maor, E. (2002). *Trigonometric Delights*. Princeton: Princeton University Press.
- Marôco, J. (2011). *Análise estatística com o SPSS statistics*. Lisboa: Report Number.
- Martínez, J., Garrido, D., Herrera-Diestra, J., Busquets, J., Sevilla-Escoboza, R., & Buldú, J. (2020). Spatial and Temporal Entropies in the Spanish Football League: A Network Science Perspective. *Entropy*, 22(2), 172.
- Mazuchi, F., Mochizuki, L., Hamill, J., Franciulli, P., Bigongiari, A., Martins, I., & Ervilha, U. (2020). Joint-Position Sense Accuracy Is Equally Affected by Vision among Children with and without Cerebral Palsy. *Journal of Motor Behavior*, 1-8. <https://doi.org/10.1080/00222895.2020.1756732>
- Mendes, P., Dias, G., Mendes, R., Martins, F., Couceiro, M., & Araújo, D. (2012). The effect of artificial side wind on the serve of competitive tennis players. *International Journal of Performance Analysis in Sport*, 12(3), 546-562. <https://doi.org/10.1080/24748668.2012.11868618>
- Milenkovic, D., & Stanojević, I. (2013). Accuracy in football: scoring a goal as the ultimate objective of football game. *International Journal of Cognitive Research in Science, Engineering and Education*, 1(2), 33-37.
- Mishra, P., & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054.
- Molina, O., Espino, Y., Rodríguez, J., Ortiz, L., & Gutiérrez, Y. (2016). La Formación de Habilidades Investigativas y las Exigencias de la Industria del Software. *Mikarimin. Revista Científica Multidisciplinaria*, 2(2), 53-68. e-ISSN 2528-7842
- O'Donoghue, P. (2012). *Statistics for sport and exercise studies: An introduction*. London: Routledge.
- Opsahl, T., Agneessens, F., & Skvoretz, J. (2010). Node centrality in weighted networks: Generalizing degree and shortest paths. *Social Networks*, 32(3), 245-251.
- Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD] (2014). *OECD science, technology and industry outlook*. Paris: OECD. http://dx.doi.org/10.1787/sti_outlook-2014-en
- Pavlopoulos, G., Secrier, M., Moschopoulos, C., Soldatos, T., Kossida, S., Aerts, J., Reinhard Schneider, R., & Bagos, P. (2011). Using graph theory to analyze biological networks. *BioData mining*, 4(1), 10.
- Pennington, D. (2011). Collaborative, cross-disciplinary learning and co-emergent innovation in eScience teams. *Earth Science Informatics*, 4(2), 55-68.
- Peterson, N., Sirard, J., Kulbok, P., DeBoer, M., & Erickson, J. (2015). Validation of accelerometer thresholds and inclinometry for measurement of sedentary behavior in young adult university students. *Research in nursing & health*, 38(6), 492-499.
- Piraveenan, M., Prokopenko, M., & Zomaya, A. (2012). Assortative mixing in directed biological networks. *IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics (TCBB)*, 9 (1), 66-78.
-

-
- Ponte, J., & Serrazina, M. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ramos, J., Lopes, R., & Araújo, D. (2018). What's next in complex networks? Capturing the concept of attacking play in invasive team sports. *Sports medicine*, 48(1), 17-28.
- Reeves, T. (2006). Design research from a technology perspective. In J. V. D. Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 52–66). New York: Routledge.
- Ribeiro, J., Silva, P., Duarte, R., Davids, K., & Garganta, J. (2017). Team sports performance analysed through the lens of social network theory: implications for research and practice. *Sports Medicine*, 47(9), 1689-1696.
- Roncaglia, I. (2016). A practitioner's perspective of multidisciplinary teams: analysis of potential barriers and key factors for success. *Psychological Thought*, 9(1), 15-23.
- Rubinov, M., & Sporns, O. (2010). Complex network measures of brain connectivity: Uses and interpretations. *NeuroImage*, 52(3), 1059–1069.
- Santos, A. (2017). *Comparação entre o efeito de jogos lúdico-recreativos de cooperação e jogos lúdico-recreativos de cooperação-oposição ao nível da atividade física e da interação em crianças do 1.º Ciclo do Ensino*. (Dissertação de Mestrado, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra).
- Sarmiento, M. (2015). Uma agenda crítica para os estudos da criança. *Currículo sem Fronteiras*, 15(1), 31-49.
- Silva, F., Lopes, V., Ribeiro, J., & Martins, F. (2019). uPATO Mobile – Network Module. In A. Afonso, & J. Lourenço, (Eds.), *Atas do INForum 2019*, 1, 132-143.
- Silva, F., Nguyen, Q., Correia, A., Clemente, F., & Martins, F. (2019). *Ultimate Performance Analysis Tool (uPATO) Implementation of Network Measures Based on Adjacency Matrices for Team Sports*. Cham: Springer International Publishing.
- Silva, F., Gomes, A., Nguyen, Q., Martins, F., & Clemente, F. (2017). A new tool for network analysis on team sports the ultimate performance analysis tool. In *Proceedings of International Conference on Engineering, Technology and Innovation*, 439 – 445. Doi: 10.1109/ICE.2017.8279918
- Silva, S. (2017). *Efeitos de jogos lúdico-recreativos de cooperação-oposição ao nível da atividade física e interações em crianças no 1.º Ciclo do Ensino Básico*. (Dissertação de Mestrado, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Coimbra).
- Smith, E. (2017). A theoretical foundation for the ethical distribution of authorship in multidisciplinary publications. *Kennedy Institute of Ethics Journal*, 27(3), 371-411.
- Tavares, D. (2017). Saúde, multidisciplinaridade e sociedade. *Saúde & Tecnologia*, 18, 5-10.
- Tempier, F. (2016). New perspectives for didactical engineering: an example for the development of a resource for teaching decimal number system. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(2), 261-276.
- Tondeur, J., Pareja Roblin, N., van Braak, J., Voogt, J., & Prestridge, S. (2017). Preparing beginning teachers for technology integration in education: ready for take-off?. *Technology, Pedagogy and Education*, 26(2), 157-177.
- Turner, J., & Baker, R. (2020). Collaborative Research: Techniques for Conducting Collaborative Research From the Science of Team Science (SciTS). *Advances in Developing Human Resources*, 22(1), 72–86. <https://doi.org/10.1177/1523422319886300>
-

-
- Varela-Mato, V., Cancela, J., Ayan, C., Martín, V., & Molina, A. (2012). Lifestyle and health among Spanish university students: differences by gender and academic discipline. *International journal of environmental research and public health*, 9(8), 2728-2741. Doi:10.3390/ijerph9082728
- Verbesselt, J., Hyndman, R., Newnham, G., & Culvenor, D. (2010). Detecting trend and seasonal changes in satellite image time series. *Remote sensing of Environment*, 114(1), 106-115.
- Vitória, J., & Lima, T. (1998). Álgebra linear. *Universidade Aberta, Lisboa*.
- Wasserman, S., & Faust, K. (1994). *Social Network Analysis: Methods and Applications*. New York, USA: Cambridge University Press.
- World Health Organization (2010). *Global recommendations on physical activity for health*. Geneva, Switzerland: WHO Press.
- Wu, Y., Xia, Z., Wu, T., Yi, Q., Yu, R., & Wang, J. (2020). Characteristics and optimization of core local network: Big data analysis of football matches. *Chaos, Solitons & Fractals*, 138, 110136.
- Young, A. T. (2015). *Multidisciplinary research teams: A quantitative analysis of interventions and barriers to their success* (Tese de Doutoramento, Universidade de Tecnologia do Texas). Disponível em <https://ttu-ir.tdl.org/handle/2346/66148> e acessado a 2 de setembro de 2019.
- Zilioli, M., Lanucara, S., Oggioni, A., Fugazza, C., & Carrara, P. (2019). Fostering Data Sharing in Multidisciplinary Research Communities: A case study in the geospatial domain. *Data Science Journal*, 18(1), 1-14. Doi: <https://doi.org/10.5334/dsj-2019-015>
- Zuo, Z., & Zhao, K. (2018). The more multidisciplinary the better? -The prevalence and interdisciplinarity of research collaborations in multidisciplinary institutions. *Journal of Informetrics*, 12(3), 736-756.

**Fernando Martins
Cecília Costa
Rui Mendes**

**Didática da Matemática na
Investigação Multidisciplinar**

▪

Fundamentos e Perspetivas

Instituto Politécnico de Coimbra

Escola Superior de Educação

Núcleo de Investigação, Educação, Formação e Intervenção